VRSU FMF 2026-03-11

prišel na konec naloge o korelacijskih koeficientih. prišel ravno na odmor. samo to nalogo so reševali.

začeli smo ob 7:30, prišel sem ob 8:15, se pravi sem zamudil 45min

zapiski davida so: s21fe/camera/20260311_08*.jpg

tu so tudi zapiski prejšnjih vaj.

[Pogojne porazdelitve]

$$P^B(A) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Pogojna porazdelitev X glede na B je porazdelitev slučajne spremenljivke X pri meri P^B.

$E(X|B) =: E^B(X)$

$D(X|B) =: D^B(X)$

N

· Pogojna porazdelitev X glede na $Y=2$?

ZDB $X | Y=2 \sim ?$

· $Y | Y \geq X$

· $E(X | Y=2)$; $E(X^2 | Y=2)$; $E(X^2Y^2 | Y=2)$

za podatke

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	$1/12$	$1/6$	0
$X=1$	$1/4$	0	$1/12$
$X=2$	0	$1/6$	$1/4$
	$1/3$	$1/3$	$1/3 = P(Y=2)$

$\Sigma = 7/12$

$P^{Y=2}(X=1) = \frac{1/12}{1/3} = 1/4$

$P^{Y=2}(X=2) = \frac{1/4}{1/3} = 3/4$

$\Rightarrow X|Y=2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

$P(Y\geq X) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$

$Y | Y\geq X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/7 & 2/7 & 4/7 \end{pmatrix}$

$P^{Y\geq X}(Y=0) = \frac{1/12}{7/12} = 1/7$

$P^{Y\geq X}(Y=1) = \frac{1/6}{7/12} = 2/7$

$P^{Y\geq X}(Y=2) = \frac{4/12}{7/12} = \frac{4}{7}$

$E(X \mid Y=2) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{7}{4}$

$E(X^2 \mid Y=2) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 4 = \frac{13}{4}$

$E(X^2Y^2 \mid Y=2) = E(X^2\cdot 4 \mid Y=2) = 4\cdot E(X^2 \mid Y=2) = 13$

$Y=2$

če poznamo porazdelitev X, poznamo $E(h(X))$

če poznamo porazdelitev X glede na B, poznamo $E(h(X) \mid B)$

če poznamo porazdelitev X glede na $Y=y$, potem poznamo $E(h(X,Y) \mid Y=y) =$

$= E(\underbrace{h(X,y)}_{\text{postane f-ja ene spremenlj.}} \mid Y=y)$

N ~~JURE BURKELCA~~

let $0<p<1$ in $P(X=t) = t p^2 (1-p)^{t-1}$ za $t=1,2,\dots$

Pogojno na $X=t$ naj bo Y porazdeljena enakomerno na množici $\{1,2,\dots,t\}$. $Y \sim ?$

$l \le t \to t \ge l$

za $l=1,2,\dots,t$: $P(Y=l \mid X=t) = 1/t$

za $l=1,2,3,\dots$ nas zanima:

izrek o popolni verjetnosti

$$P(Y=l) = \sum_{t=l}^{\infty} P(X=t)\cdot P(Y=l \mid X=t) = \sum_{t=l}^{\infty} \cancel{t} p^2(1-p)^{t-1}\cdot\frac{1}{\cancel{t}} = \sum_{t=l}^{\infty} p^2(1-p)^{t-1} =$$

$$= p^2 \sum_{t=0}^{\infty} (1-p)^{t+l-1} = p^2(1-p)^{l-1}\sum_{t=0}^{\infty}(1-p)^t = \frac{p^2(1-p)^{l-1}}{1-1+p} =$$

$t := t-l$

$$= \frac{p^{\cancel{2}}(1-p)^{l-1}}{\cancel{p}} = p(1-p)^{l-1}$$

VEMO (GEOM. VRSTA): $\sum_{t=0}^{\infty} q^t = \frac{1}{1-q}$; $|q|<1$

torej $Y \sim Geo(p)$

če je $H_1, H_2, \dots (H_n)$ končen ali števno neskončen popoln sistem dogodkov, velja

$P(A) = \sum_k P(H_k)\, P(A \mid H_k)$ $\quad$ $E(X) = \sum_k P(H_k)\, E(X \mid H_k)$

N ~~MEHCANLEK~~

Dana je posoda s petimi belimi in petimi rdečimi kroglicami. Na slepo in brez vračanja jih izvlečemo 8. Za vsako rdečo, ki smo jo izvlekli, vržemo pošteno kocko. Let S število šestic.

$E(S) = ?$

let X št. vlečih izd. kroglic

$H_t = \{X = t\}, \quad t = 3, 4, 5$

$$P(X=t) = \frac{\binom{5}{5-t}\binom{5}{t-3}}{\binom{10}{2}}$$

$\binom{5}{5-t}$ izmed vlečih je $5-t$ neizvlečenih

$\binom{5}{t-3}$ izmed belih je $2-(5-t)$ neizvlečenih

$\binom{10}{2}$ neizvlečeni izberemo

$P(X=t)$: verjetnost, da je med osmimi izvl. krogl. natanko t vlečih.

$P(X=3) = \dots = 2/9$

$P(X=4) = \dots = 5/9$

$P(X=5) = \dots = 1 - \frac{2}{9} - \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$

$S \mid X = t \sim Bin\left(t, \frac{1}{6}\right)$ ~ kolikokrat pade šestica v t metih

$E(S \mid X = t) = t/6$

$E(S) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{6} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{6} = \dots = 2/3$

X je porazdeljena hipergeometrijsko; $X \sim Hip(8, 5, 10)$

$\boxed{\text{let } X \sim Hip(s, r, n). \quad E(X) = \frac{rs}{n}}$

$E(S) = \sum_t P(X=t)\, E(S \mid X=t) = \sum_t P(X=t) \frac{t}{6} = \frac{1}{6} \sum_t t\, P(X=t) =$

$= \frac{1}{6} E(X) = 1/6 \cdot \frac{5 \cdot 8}{10} = 2/3$

$P(A \mid Y = y) = g(y) \qquad E(X \mid Y = y) = h(y)$

iz fj naredimo sl. spr. namesto tega pišemo

$P(A \mid Y) = g(Y) \qquad E(X \mid Y) = h(Y)$

$P(A) = \sum_y P(Y=y)\, g(y) = E(g(Y)) = E(P(A \mid Y))$

$E(X) = \sum_y P(Y=y)\, h(y) = E(h(Y)) = E(E(X \mid Y))$

$E(S \mid X) = X/6 \qquad E(S) = E(X/6) = \frac{E(X)}{6} = \frac{4}{6} = 2/3$

$E(X g(Y) \mid Y=y) = E(X \mid Y=y)\, g(y)$

$\downarrow$

$E(X g(Y) \mid Y) = E(X \mid Y)\, g(Y)$

N

let $Y = Bin(6, 1/3)$ $\quad E(X \mid Y) = 3Y + 1$ $\quad E(X) = ?$ $\quad E(XY) = ?$

$E(X) = E(X) = E(E(X \mid Y)) = E(3Y+1) = 3E(Y) + 1 = 7$

$E(Y) = 2$

$E(XY) = E(E(XY \mid Y)) = E(E(X \mid Y) Y) = E((3Y+1)Y) =$

$= 3E(Y^2) + E(Y) \ldots = 18$

$E(Y^2) = \ldots = \frac{16}{3}$

$Y \sim Bin(n, p)$
$E(Y) = np$
$D(Y) = np(1-p) = E(Y^2) - (E(Y))^2$

N

Pogojna gostota: $p_{X|Y}(x \mid y) = \dfrac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

$p_X(x \mid Y=y)$

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x} & ; \ x > 2y > 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$$

$p_{X|Y} = ?$ $\qquad p_{Y|X} = ?$

... I lost focus na zadnji nalogi :(