VRSVFMF2026-02-25 zamudil 1. uro vsled prometne nesreče.

meta:

3. kolokvij: čet, 4.6. glasovali smo za uro: 6 za 8^{00}, 12 za 17^{00}.

N

$X \sim Geo(p)$ $\quad E(X) = ?$, $D(X) = ?$ $\qquad X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ p & p(1-p) & p(1-p)^2 & \dots \end{pmatrix}$

pričakovana vrednost, disperzija.

$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$; $k = 1,2,3,\dots$ $\qquad 1+q+q^2+\dots = \frac{1}{1-q}$; $|q|<1$

$$E(X) = p + 2p(1-p) + 3p(1-p)^2 + \dots = p(1+2(1-p)+3(1-p)^2+\dots) = p\,f(1-p),$$

kjer je $f(q) = 1+2q+3q^2+\dots = \frac{\partial}{\partial q}(q+q^2+q^3+\dots) = \frac{\partial}{\partial q}(\underbrace{1}+q+q^2+q^3+\dots)$

lahko dodamo, itak izgine po odvodu.

$= \frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{1-q} =$ to smemo storiti, ker vrsta iz odvodov, kot tudi; vsaka potenčna vrsta znotraj konvergenčnega območja, lokalno enakomerno konvergira.

$= \frac{1}{(1-q)^2}$.

$$= p \cdot \frac{1}{(1-1+p)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} = E(X)$$

$D(X) = ?$ Namig: najprej izračunajte $E(X(X-1))$.

$$E(X(X-1)) = 1 \cdot 0\, p + 2 \cdot 1\, p(1-p) + 3 \cdot 2 \cdot p(1-p)^2 +$$
$$+ 4 \cdot 3 \cdot p(1-p)^3 + \dots = 2p(1-p) + 6p(1-p)^2 + 12p(1-p)^3 + \dots =$$
$$= p(1-p)(2 \cdot 1 \cdot (1-p)^0 + 3 \cdot 2 \cdot (1-p)^1 + \dots) = p(1-p) \cdot g(1-p),$$ kjer

je $g(q) = 2 \cdot 1 \cdot q^0 + 3 \cdot 2 \cdot q^1 + 4 \cdot 3 \cdot q^2 + \dots =$

$$= 2 + 6q + 12q^2 + \dots = \frac{\partial}{\partial q}(2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial q}(\underbrace{1+q}+q^2+q^3+\dots) = \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-q)^2}\right)' =$$

lahko dodamo, itak izgine pri dvojnem odvodu.

$$= \dots = 2 \cdot \frac{1}{(1-q)^3}$$

$$= p(1-p) \cdot g(1-p) = p(1-p) \cdot 2 \cdot \frac{1}{(1-1+p)^3} =$$
$$= p(1-p) \cdot \frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2} = E(X(X-1)) =$$
$$= E(X^2 - X) \stackrel{*}{=} E(X^2) - E(X)$$

VELJA: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Potrebujemo $E(X^2) = E(X^2) - E(X) + E(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

N

$$\left.\begin{aligned} E(h(W)) &= \sum_w h(w)\, P(W=w) \\ E(h(X,Y)) &= \sum_x \sum_y h(x,y)\, P(X=x, Y=y) \end{aligned}\right\}\ \text{velja.}$$

Podana je porazdelitev slučajnega vektorja:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=3$
$X=0$	0,05	0,1	0,2
$X=1$	0,15	0	0,15
$X=4$	0,2	0,1	0,05

$$E(XY^2) = \sum_x \sum_y (x \cdot y^2)\, P(X=x, Y=y) =$$

$$= \cancel{0 \cdot 0^2 \cdot 0{,}05} + \cancel{0 \cdot 1^2 \cdot 0{,}01} + \cancel{0 \cdot 3^2 \cdot 0{,}2} +$$

$$+ \cancel{1 \cdot 0^2 \cdot 0{,}15} + \cancel{1 \cdot 1^2 \cdot 0} + 1 \cdot 3^2 \cdot 0{,}15 +$$

$$+ \cancel{4 \cdot 0^2 \cdot 0{,}2} + 4 \cdot 1^2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 3^2 \cdot 0{,}05 =$$

$$= 9 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}1 + 36 \cdot 0{,}05 = 3{,}55$$