VRSU FMF 2025-10-24

naj bodo A, B, C dogodki:

$P(C)>0, \quad P(B|C)>0.$

Recimo, da poznamo $P(B|C)$.
Pogojno verjetnost A na katerem dogodku moramo še poznati, če želimo poznati $P(A\cap B|C)$?

imamo

$$P(B|C)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}$$

želimo

$$P(A\cap B|C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}$$

$$P(A|B\cap C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}=\frac{\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}}{\frac{P(B\cap C)}{P(C)}}=$$

$$=\frac{P(A\cap B|C)}{P(B|C)}$$

$$P(A\cap B|C)=P(B|C)\cdot P(A|B\cap C)$$

$$\|$$

$$P^C(A\cap B)=P^C(B)\cdot P^C(A|B)$$

N

Janez in Peter igrata namizni tenis. V vsaki rundi nekdo zmaga in oba sta enakovredna (ne glede na zgodovino). Igrata, dokler eden od njiju ne dobi 6 rund. Trenutni izid je 4:2 za Janeza. Kolikšna je pogojna verjetnost, da Janez dobi cel dvoboj?

Janez lahko zmaga z

6:2 odigrani sta dve rundi, zmagal 7. in 8.
$P(J_7\cap J_8)=P(J_7)\cdot P(J_8)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

6:3 PJJ ali JPJ: $P(P_7\cap J_8\cap J_9)+P(J_7\cap P_8\cap J_9)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

6:4 PPJJ, PJPJ, JPPJ $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$

6:5 PPPJJ, PPJPJ, PJPPJ, JPPPJ $\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

D_j = { dvoboj dobi Janez }

$Z_{a:b}$ = { pride do izida a:b za Janeza }   (zgodovina)

$$P(D_j \mid Z_{a:b}) = \frac{13}{16}$$

„ne gleda na zgodovino": če je B dogodek, ki se nanaša na prvih n rund, je

$$P(J_{n+1} \mid B) = P(P_{n+1} \mid B) = \frac{1}{2}$$

Dogodek D_j se ob dogodku $Z_{4:2}$ ujema z dogodkom $Z_{6:2} \cup Z_{6:3} \cup Z_{6:4} \cup Z_{6:5}$

paroma disjunktni

$$P(D_j \mid Z_{4:2}) = P(Z_{6:2} \mid Z_{4:2}) + P(Z_{6:3} \mid Z_{4:2}) + P(Z_{6:4} \mid Z_{4:2}) + P(Z_{6:5} \mid Z_{4:2})$$

Dogodek $Z_{6:2}$ se ob dogodku $Z_{4:2}$ ujema z dogodkom $J_7 \cap J_8$, zato je

$$P(Z_{6:2} \mid Z_{4:2}) = P(J_7 \cap J_8 \mid Z_{4:2}) =$$

$$= P(J_7 \mid Z_{4:2}) \cdot P(J_8 \mid (Z_{4:2} \cap J_7)) =$$

se nanaša le na prvih 6 rund

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

...

NE RAZUMEM, KAJ SE DOGAJA.

reševanje z nasprotnim dogodkom: Jakob dobi četr:

P_p: 4:6 $\frac{1}{16}$ PPPP

5:6 $\frac{4}{32} = \frac{1}{8} = \frac{2}{16}$ JPPPP, PJPPP, PPJPP, PPPJP

$\frac{3}{16}$

$P_J = \frac{16}{16} - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$

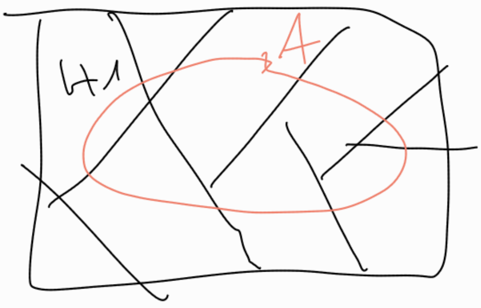
<u>Izrek</u>: o popolni verjetnosti:

$H_1, H_2, \ldots [, H_n]$ → končno ali števno

razbitje/particija Ω

$\forall k: P(H_k) > 0$

$\sum_k P(H_k) = 1$



$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \ldots [+ P(H_n)P(A|H_n)]$$

N

Imamo dve posodi: v prvi je 5 B bele, 3 R rdeče, 2 Č črne. Dvofazni verjetnostni poskus:

① na slepo prenesemo 1 kroglico v drugo posodo, kjer so že 3B, 3Č.

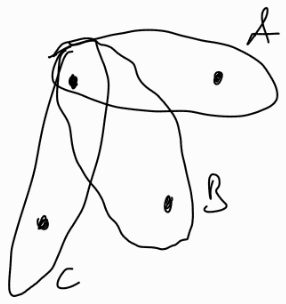
② na slepo in brez vračanja izvlečemo 2 kroglici. Kolikšna je verjetnost, da je izid enak {1B, 1Č}.

• • • ≈ 0,529

N

Če je $P(A|B)=P(A|C)=p$, ali je nujno tudi $P(A|B\cup C)=p$?

$\Omega = \{4 \text{ enako verjetni izidi}\}$



$P(A|B)=\frac{1}{2}$ $\quad P(A|C)=\frac{1}{2}$ $\quad P(A|B\cup C)=\frac{1}{3}$

Ali trditev vendarle velja ob smiselni dodatni predpostavki?
Da, če sta A,B disjunktna.

Trditev: Če so $H_1, H_2, \ldots [, H_n]$ paroma disjunktni, $\forall k.\ P(A|H_k)=p$, tedaj $P(A|\bigcup_k H_k)=p$

Dokaz: velja, ker

$$P(A|\bigcup_k H_k) = \frac{P(A\cap(\bigcup_k H_k))}{P(\bigcup_k H_k)} = \frac{P(\bigcup_k (A\cap H_k))}{P(\bigcup_k H_k)} =$$

disjunktnost

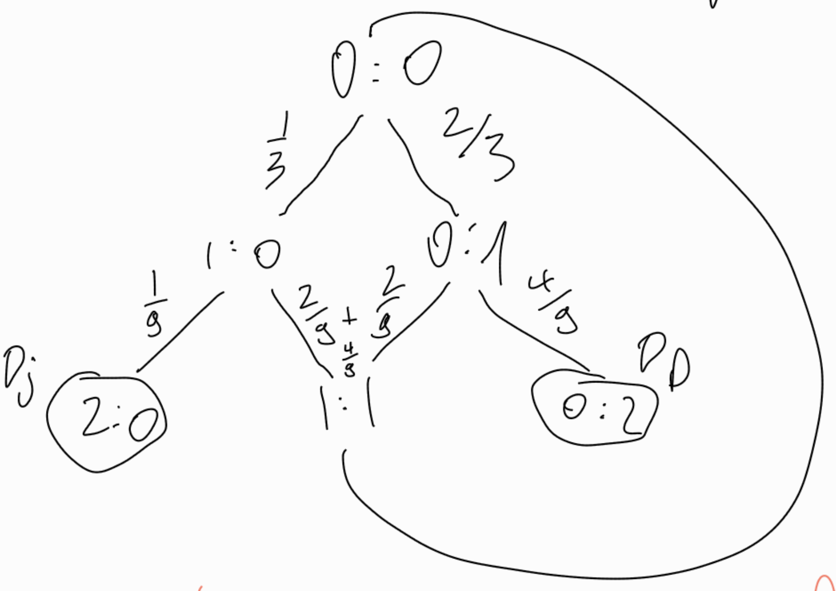
$$\frac{\sum_k P(A\cap H_k)}{\sum_k P(H_k)} = \frac{\sum_k P(H_k)\overbrace{P(A|H_k)}^{p}}{\sum_k P(H_k)} =$$

$$= \frac{p\sum_k P(H_k)}{\sum_k P(H_k)}$$

„pogojno na dogodek, ki se nanaša na prvih n rund" ~ „pogojno na $I_1\cap\cdots\cap I_n$, kjer je $I_k = J_k$ ali $I_k = P_k$"

Janez in Peter igrata namizni tenis na dve

točki razlike. V posameznih vrndi Janez zmaga z verjetnostjo $\frac{1}{3}$ ne glede na zgodovino. Kolikšna je brezpogojna verjetnost (od začetka) da Janez dobi cel dvoboj?



$$P(D_J) = \overbrace{P(Z_{2:0})}^{1/9} \cdot \overbrace{P(D_J|Z_{2:0})}^{1} + \overbrace{P(Z_{1:1})}^{4/9} \overbrace{P(D_J|Z_{1:1})}^{P(D_J)} + \overbrace{P(Z_{0:2})}^{4/9} \overbrace{P(D_J|Z_{0:2})}^{0} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 1 + \frac{4}{9} \cdot P(D_J) + ~~\frac{4}{9} \cdot 0~~$$

$$\frac{5}{9} P(D_J) = \frac{1}{9}$$

$$P(D_J) = \frac{1}{5}$$

N

Meghan pošlje moža na trg po solato, ki jo prodajata Katica in Ljubica. Mož pri Katici kupi z verjetnostjo 60%, pri Ljubici pa z verjetnostjo 40%. Katica da možu nagnito solato v 10% primerih, Ljubica pa v 20%. Mož prinese domov nagnito solato. Meghan ga nahruli: „Drugič raje glej solato, ne pa Ljubice!" Kolikšna je pogojna verjetnost, da je mož kupil pri Ljubici?

$P(K) = 0,6 \qquad P(L) = 0,4$

$P(G|K) = 0,1 \qquad P(G|L) = 0,2$

$$L(L|G) = \frac{P(L \cap G)}{P(G)} = \frac{P(L)\,P(G|L)}{P(K)P(G|K) + P(L)\,P(G|L)} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,2}{0,6 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,2} = \frac{8,0}{14,0} = \frac{4}{7} \approx 0,571$$