VRSPFMF2026-03-12

zamudil 15 minut, ne vem točno, kaj počeno (ali, prepisujič sem manjkal).

šibki zakon velikih števil

Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad \frac{D(S_n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \{X_n\}$ velja ŠZVŠ.

<u>Posl. (Čebišev):</u> Let $X_1, X_2, X_3, \dots$ paroma nekorelirane sl. sprem. (posebej neodvisne) in $\sup_{n\in\mathbb{N}} D(X_n) < \infty$. Potem velja ŠZVŠ.

<u>Dokaz:</u> Let $C := \sup_{n\in\mathbb{N}} D(X_n) < \infty$. Potem je $D(S_n) = D(X_1 + \dots + X_n) \overset{\text{nekoreliranost}}{=}$
$= D(X_1) + \dots + D(X_n) \le n \cdot C$ in zato je

$$\frac{D(S_n)}{n^2} \le \frac{n\cdot C}{n^2} = \frac{C}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Torej lahko uporabimo izrek Markova.

<u>Zgled:</u> Bernoullijevo zaporedje neodvisnih ponovitev postopka:

Opazujmo dogodek A s $P(A) = p \in (0,1)$. Naj bo $(X_n = 1)$ dogodek, da se A zgodi v n-ti ponovitvi postopka, sicer je $X_n = 0$. Potem $X_n \sim \mathrm{Ber}(p)$, t.j. $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$. Ker je $D(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = p - p^2 = p\cdot(1-p) = p\cdot q$, so pogoji v posledici Čebiševa izpolnjeni. Zato za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja ŠZVŠ: $\forall \varepsilon > 0$: $P\left(\left|\underbrace{\frac{S_n - \overbrace{E(S_n)}^{= n\cdot E(X)}}{n}}_{Y_n :=}\right| \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Torej $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

S_n je frekvenca dogodka A, $\frac{S_n}{n}$ je relativna frekv. Torej $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. To je <u>Bernoullijev zakon velikih števil</u> iz leta 1713.

<u>Izrek (Kolmogorov):</u> Če za neodvisne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \dots$ velja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < \infty$, potem velja KZVŠ (krepki zakon velikih števil), t.j. $P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - E(S_n)}{n} = 0\right) = 1$. Posebno to velja, če je $\sup_{n\in\mathbb{N}} D(X_n) < \infty$, saj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira (primerjalni kriterij).

(ne bomo dokazali).

<u>Zgled:</u> Vrnimo se nazaj na Bernoullijevo zaporedje neodvisnih ponovitev postopka: $X_n : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, $D(X_n) = pq$. Po izreku Kolmogorova velja KZVŠ, t.j.: $P\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n} - p\right) = 0\right) = 1$ oziroma

$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p\right) = 1$. To posplošuje Bernoullijev zakon velikih števil: zob relativne frekvence d.g. A konvergirajo proti p skoraj gotovo. To sledi iz izreka Kolmogorova, ki ga ne bomo dokazali.

[16. Centralni limitni izrek]

Let $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk s končnimi disperzijami. Let $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$ za $n \in \mathbb{N}$ in standardizirajmo: $Z_n := \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)}$. Zato je očitno $E(Z_n) = 0$ in $D(Z_n) = 1$, ker $D(Z_n) = \frac{1}{\sigma(S_n)^2} \cdot D\left(S_n - E(S_n)\right) = \frac{1}{\sigma(S_n)^2} \cdot D(S_n) = \frac{1}{D(S_n)} D(S_n) = 1$

Za $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja centralni limitni zakon, če

$$\left(F_{Z_n}(x) := P(Z_n \le x)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(F_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt\right)$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$. Pravimo, da zaporedje Z_n po porazdelitvi konvergira proti std. normalni sluč. spr.

<u>Centralni limitni izrek (CLI):</u> (osnovna varianta)

Če so $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ neodvisni in enako porazdeljeni, potem za $\{X_n\}$ velja centralni limitni zakon, t.j. $\forall x \in \mathbb{N}$:

$$P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Če so $\{X_n\}$ neodvisni in normalno porazdeljeni $N(\mu, \sigma)$, potem je $Z_n \sim N(0,1)$.

V dokazu bomo uporabili:

<u>Izrek</u> o zveznosti momentno rodovne f-je: $M_X(t) = E(e^{tX})$

Naj za zaporedje slučajnih spremenljivk Z_n velja:

$$M_{Z_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} M_{N(0,1)}(t) = e^{t^2/2} \quad \text{za vse } t \in (-\delta, \delta)$$

pri nekem pozitivnem δ, potem je $F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{N(0,1)}(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Tega zadnjega izreka ne bomo dokazali.

Dokaz CLI v primeru, ko X_n imajo momentno rodovne funkcije $M_X(t) = E(e^{tX})$ na neki okolici točke 0. Za ostale primere ne bomo dokazali.

Let $E(X_n) = \mu$, $D(X_n) = \sigma^2$, $U_n = X_n - \mu$. Torej $E(U_n) = 0$, $D(U_n) = E(U_n^2) = \sigma^2$. Potemtakem je $D(S_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) = n \cdot \sigma^2$ in $E(S_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = n \cdot \mu$. Torej je

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} = \frac{U_1 + \dots + U_n}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$$

Potem velja za $\underset{U_n \text{ so enako porazd.}}{\text{vsak } n}$ $M_{U_n}(t) = E(e^{tU_n}) \overset{\text{razvijemo}}{=}$

$$= 1 + t \cdot \underbrace{E(U_n)}_{0} + \frac{t^2}{2!} E(U_n^2) + \underbrace{o(t^2)}_{\text{ostanek, višji členi}} = 1 + 0 + \frac{t^2 \sigma^2}{2} + o(t^2).$$

Zato je $M_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(U_1 + \dots + U_n)}\right) =$

$$= E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} U_1} \cdots e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} U_n}\right) = \underbrace{E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} U_1}\right)}_{\text{vsi}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} U_n}\right)}_{\text{enaki}} =$$

$$= \left(E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} U_n}\right)\right)^n = \left(M_{U_n}\left(t/\sigma\sqrt{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \underbrace{o\left((t/\sqrt{n})^2\right)}_{\text{ostanek majhen}}\right)^n =$$

Fiksirajmo t in n pošljimo v neskončnost:

$$= \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o(1/n)\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{t^2/2}.$$

Na koncu smo uporabili lemo iz analize:

Lema: Če realno zaporedje x_n konvergira proti $x \in \mathbb{R}$, potem $\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^x$. CLI se sedaj sledi po izreku od prej.

Splošen dokaz za CLI je s pomočjo karakterističnih f-j, t.j.:

$\varphi_X(t) := E(e^{itX}) = E(\cos(tX) + i \sin(tX))$, $t \in \mathbb{R}$. Vedno $\exists$, za razliko od momentno rodovnih f-j.

CLI lahko povemo takole: Let $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ neodvisne in enako porazdeljene sl. sprem. z $E(X_n) = \mu$ in $\sigma(X_n) = \sigma$. Po CLI je pri velikih n porazdelitvah za

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$$ približno $N(0,1)$.

Torej je $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1)$, torej je

$$\bar{X} := \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \overset{\text{približno porazd.}}{\approx} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

vzorčno povprečje, ti je porazdeljeno normalno s tema dvema parametra.

Če pa so X_n na začetku porazdeljeni normalno z $N(\mu, \sigma)$, pa $\forall n \in \mathbb{N}$ $\bar{X} \underset{\text{porazdeljeno eksaktno}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$