VRSPFMF 2026-02-26 zamudil 15 min

nadaljujemo z rodovnimi funkcijami:

$p_t = P(X=t)$; $t=0,1,2,\dots$

$G_X(s) = \sum_{t=0}^{\infty} p_t s^t = E(s^X)$

Iz teorije taylorjevih vrst sledi

<u>Izrek o enoličnosti</u>: Naj imata X in Y rodovni f-ji G_X in G_Y. Potem je $G_X(s) = G_Y(s)$ za vsak $s \in [-1,1] \Leftrightarrow P(X=t) = P(Y=t)$ za vsak $t=0,1,2,\dots$ Tedaj velja $P(X=t) = \frac{1}{t!} G_X^{(t)}(0)$.

oblika rod. f-je: $f(x) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{f^{(t)}(0)}{t!} x^t$

odvod: $G_X'(s) = \sum_{t=1}^{\infty} t p_t s^{t-1}$ za vse $s \in (-1,1)$.

$$\lim_{s\uparrow 1} G_X'(s) = \lim_{s\uparrow 1} \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot p_t \cdot s^{t-1} \overset{\text{abelova lema}}{=} \sum_{t=1}^{\infty} \lim_{s\uparrow 1} \left(t p_t s^{t-1}\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} t p_t = E(X).$$

<u>Izrek</u>: Naj ima X rodovno f-jo $G_X(s)$ in $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je

$$G_X^{(n)}(1-) := \lim_{s\uparrow 1} G_X^{(n)}(s) = E\left(X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)\right).$$

<u>Dokaz</u>: Za $s \in [0,1)$ je $G_X^{(n)}(s) = \sum_{t=n}^{\infty} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1) p_t s^{t-n}$.

Ko gre $s \uparrow 1$, z uporabo Abelove leme dobimo

$$\lim_{s\uparrow 1} G_X^{(n)}(s) \overset{\text{abelova lema}}{=} \sum_{t=n}^{\infty} \lim_{s\uparrow 1} \left(t(t-1)\cdots(t-n+1) p_t s^{t-n}\right) =$$

$$= \sum_{t=n}^{\infty} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1) p_t = E\left(X(X-1)\cdots(X-n+1)\right).$$

<u>Posledica</u>: $D(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 =$

$$= G_X''(1-) + G_X'(1-) - G_X'(1-)^2.$$

<u>Izrek</u>: Naj bosta X in Y neodvisni sl. sprem. z rod. f-jama G_X in G_Y. Tedaj je $G_{X+Y}(s) = G_X(s)\, G_Y(s)$ za vse $s \in [-1,1]$.

$$G_{X+Y}(s) = E(s^{X+Y}) = E(s^X s^Y) \overset{\text{neodvisni} \Rightarrow \text{nekoreliranost}}{=} E(s^X)\, E(s^Y) = G_X(s) G_Y(s)$$

<u>Posplošitev</u>: Če je $S_n = X_1 + \dots + X_n$ vsota neodv. sluč. spr. z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$, je $G_{S_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s)$ za vsak $s \in [-1,1]$.

Če so $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ enako porazdeljeni, potem je

$$G_{S_n}(s) = (G_X(s))^n, \text{ kjer je } G_X = G_{X_t} \ \forall t.$$

Kakšna pa je rodovna f-ja vsote $S_N = \underbrace{X_1 + \dots + X_N}_{\text{enako porazdeljeni}}$, kjer je N tudi sama slučajna spremenljivka?

Izrek: Naj bodo $\forall n \in \mathbb{N}$ slučajne spr. $N, X_1, X_2, \dots, X_n$ neodvisne. Naj ima N rodovno f-jo G_N, X_k pa rodovno f-jo G_X $\forall k$ ZDB so enako porazdeljeni. Potem je rodovna f-ja sluč. spr. $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ enaka $G_{S_N}(s) = G_N(G_X(s))$ za vsak $s \in [-1,1]$

Dokaz:

$$P(S_N = k) = \sum_n P(S = k, \underbrace{N = n}_{\text{popoln sistem dogodkov}}) = \sum_n P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k, N = n) \overset{\text{neodvisnost}}{=}$$

$$= \sum_n P(N=n) P(X_1 + \dots + X_n = k)$$

Potem je $G_{S_N}(s) = \sum_k P(S_N = k) \cdot s^k = \sum_k \sum_n P(N=n) P(X_1 + \dots + X_n = k) s^k =$

lahko menjamo vrstni red seštevanja pri potenčnih vrstah -- ANALIZA

$$= \sum_n P(N=n) \underbrace{\sum_k P(X_1 + \dots + X_n = k) s^k}_{G_{X_1 + \dots + X_n}(s) = (G_X(s))^n} = G_N(G_X(s))$$

Posledica: Pri predpostavkah velja: $E(S) = E(N) \cdot E(X)$.

Dokaz: $E(S) = G_S'(1-) \overset{\text{izrek}}{=} \underbrace{G_N'(G_X(1-))}_{G_N'(1-) = E(N)} \cdot \underbrace{G_X'(1-)}_{= E(X)}$

Primer (kokoši, jajca, piščanci): kokoš znese N jajc, $N \sim Poi(\lambda)$. Iz vsakega jajca se neodvisno od drugih jajc izvali piščanec z verjetnostjo $p \in (0,1)$.

$(X_k = 1)$ je dogodek, da se iz k-tega jajca izvali piščanec, sicer je $(X_k = 0)$. Potem je $X_k \sim Ber(p)$, $\forall j$.

$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, kjer $q = 1-p$. Naj bo K št. piščancev.

Očitno je $K = X_1 + X_2 + \dots + X_N$.

Vemo $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$, $G_X(s) = q + ps$.

Po izreku je $G_K(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda(q + ps - 1)} = e^{\lambda(ps - p)} =$
$= e^{\lambda p(s-1)}$. Od tod $K \sim Poi(\lambda p)$

[14. Momentno rodovne f-je]

Def.: Momentno rodovna f-ja sl. spr. X je $M_X(t) := E(e^{tX})$ za tiste $t \in \mathbb{R}$, za katere mat. upanje obstaja. Če ima X vrednosti v $\mathbb{N}_0$, potem je

$$M_X(t) = E((e^t)^X) = G_X(e^t).$$

Če je X zvezno porazdeljena z gostoto $p(x)$, je

$$\underline{M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} p(x)\, dx.} \to \text{Laplaceova transformacija f-je } p(x).$$

Zgled: $X \sim N(0,1)$, t.j. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2 (x-t)^2} dx}_{N(t,1)} \cdot e^{t^2/2} = e^{t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$= 1$

Izrek: Naj $M_X(t) < \infty$ za vse $t \in (-\delta, \delta)$ pri nekem $\delta > 0$. Potem je porazdelitev za X natanko določena z M_X, vsi začetni momenti sluč. spr. obstajajo; $z_k := E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ za vse $k = 0, 1, 2, \dots$ in

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k \quad \text{za vse } t \in (-\delta, \delta).$$

Dokaz (bistvo): $M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} t^k.$$