VRSPFMF2026-02-19

... Pogojna porazdelitev v primeru dvorazsežne normalne porazdelitve je
$N(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y), \sigma_x \cdot \sqrt{1-\rho^2})$.

<u>Primer:</u> X ... koncentracija ogljikovih delcev

Y ... koncentracija ozona

(X,Y) je približno normalno porazdeljen slučajni vektor, in sicer
$\mu_x = 10{,}7$, $\sigma_x^2 = 29$, $\mu_y = 0{,}1$, $\sigma_y^2 = 0{,}02$, $\rho = 0{,}72$

Naj bo koncentracija ogljikovih delcev $x = 20{,}0$.

a) Koliko je pričakovana koncentracija ozona (EV)?

b) Kolikšna je verjetnost, da je koncentracija ozona škodljiva zdravju, t.j. je večja od $0{,}3$?

a) $N(\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x), \sigma_y \cdot \sqrt{1-\rho^2})$. pričakovana konc. ozona:

$$E(y \mid x=20{,}0) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x) = 0{,}1 + 0{,}72\sqrt{\frac{0{,}02}{29}}(20{,}0-10{,}7) = 0{,}28$$

b) Pogojna porazdelitev je $N(0{,}28, \sqrt{0{,}02\cdot(1-0{,}72)^2}) = N(0{,}28, 0{,}1)$.

$$P(y>0{,}3 \mid x=20{,}0) = 1 - P(y \le 0{,}3 \mid x=20{,}0) =$$
$$= 1 - \underbrace{F_{N(0,1)}\left(\frac{0{,}3-0{,}28}{0{,}1}\right)}_{\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{0{,}3-0{,}28}{0{,}1}\right)} = 0{,}42$$

[12. Višji momenti in vrstilne karakteristike]

<u>Definicija:</u> Let $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. Pravimo, da je moment reda k glede na točko a slučajne spremenljivke X definiran takole (če obstaja):

$$m_k(a) = E((X-a)^k)$$

Za a običajno vzamemo:

1. $a = 0$ ... začetni moment reda k je $m_k(0) = E(X^k)$
2. $a = E(X)$ ... centralni moment: $m_k := m_k(E(X)) = E((X-E(X))^k)$

<u>Očitno je $z_1 = E(X)$ in $m_2 = D(X)$.</u>

<u>Trditev:</u> Če obstaja $m_n(a)$, potem obstaja moment $m_k(a)$ za vsak $k<n$.

<u>Dokaz:</u> (zvezni primer)

$E(|X-a|^n) < \infty$ je predpostavka. Želimo videti, da je

$E(|X-a|^k) < \infty$ za vsak $k<n$:

$$E(|X-a|^k) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-a|^k p(x)\,dx = \int_{|x-a|\le 1} \overbrace{|x-a|^k}^{\le 1} \cdot p(x)\,dx + \int_{|x-a|>1} \overbrace{|x-a|^k}^{\le |x-a|^n} p(x)\,dx \le$$

$$\le \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx}^{=1} + \int_{-\infty}^{\infty} |x-a|^n \cdot p(x)\,dx = 1 + E(|X-a|^n) < \infty \qquad \square$$

Trditev: Če obstaja začetni moment z_n, potem obstaja tudi $m_n(a)$ za poljubno točko $a\in\mathbb{R}$.

Dokaz: $E(|X-a|^n) < \infty$

linearnost E

$$E(|X-a|^n) \overset{\Delta\neq}{\le} E\left((|X|+|a|)^n\right) = E\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|X|^k\cdot|a|^{n-k}\right) =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|a|^{n-k}E(|X|^k) < \infty,$$ saj obstajajo vsi začetni momenti z_k za vse $k\le n$ po prejšnji trditvi. □

Posledica: Centralne momente lahko izrazimo z začetnimi.

$$m_n = E\left((X-E(X))^n\right) = E\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\,(-\overbrace{E(X)}^{z_1})^{n-k}\right) =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}z_1^{n-k}\,\overbrace{E(X^k)}^{z_k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}z_1^{n-k}z_k$$

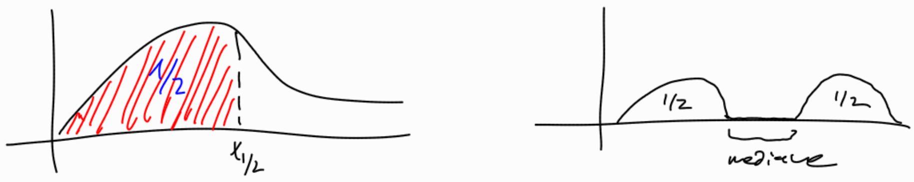
Opomba: Za razliko od momentov vrstilne karakteristike vselej obstajajo.

Definicija: Osnovna vrstilna karakteristika je mediana. To je vsaka vrednost $x\in\mathbb{R}$, za katero velja $P(X\le x)\ge 1/2$ in $P(X\ge x)\ge 1/2$.

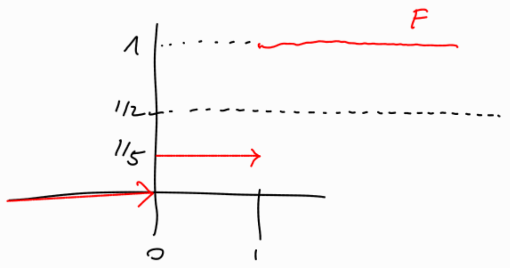
Opomba: Naj bo F porazdelitvena f-ja za X. Tedaj je pogoj za mediano naslednji: $F(x-)\le 1/2\le F(x)$, saj je $P(X\ge x)=1-P(X<x)=1-F(x-)$.

Mediana vedno obstaja; lahko jih je več. Označimo jih z $\underbrace{X_{1/2}}_{\text{množica median}}$.

V primeru, ko je X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka, je pogoj za mediano $F(x_{1/2})=1/2$ oziroma $\int_{-\infty}^{x_{1/2}} p_X(t)\,dt = 1/2$.



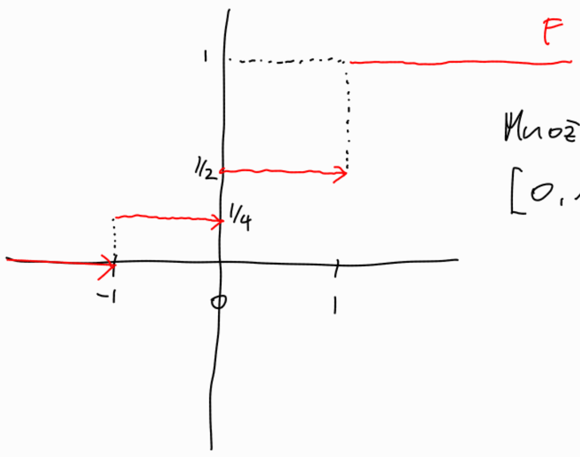
Zgledi: 1) $X\sim Bev(4/5)$; $X:\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/5 & 4/5\end{pmatrix}$; $E(X)=4/5$



$x_{1/2}=1$

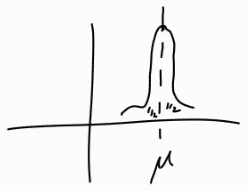
2) $X:\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$

$$E(X)=\frac{-1}{4}+0+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$



Množica median je $[0,1]$

3.) $X\sim N(\mu,\sigma)$



$x_{1/2}=\mu=E(X)$

Definicija: Kvantil reda $p\in(0,1)$ je vsaka vrednost $x_p\in\mathbb{R}$, da je $P(X\le x_p)\ge p$ in $P(X\ge x_p)\ge 1-p$. Če je F porazd. f-ja za X, potem je ta pogoj $F(x_p-)\le p\le F(x_p)$, saj je

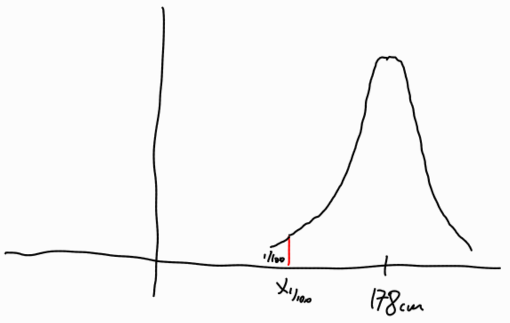
$$P(X\ge x_p)=1-P(X<x_p)=1-F(x_p-).$$ Če je X zvezno porazd.,

potem je pogoj $F(x_p) = p$ oz. $\int_{-\infty}^{x_p} p(t)\,dt = p$.

Kvartili so: $x_{1/4}$, $x_{2/4} = x_{1/2}$, $x_{3/4}$

(Per)centili so: $x_{1/100}, x_{2/100}, \dots, x_{99/100}$.

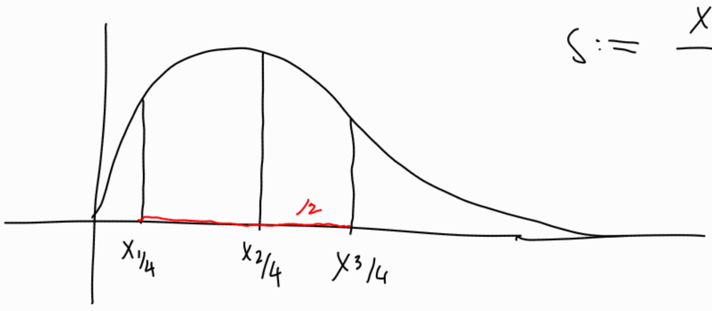
Primer: Telesna višina odraslih moških:



Definicija: (Semiinter)kvartilni razmik:

$$s := \frac{x_{3/4} - x_{1/4}}{2}$$

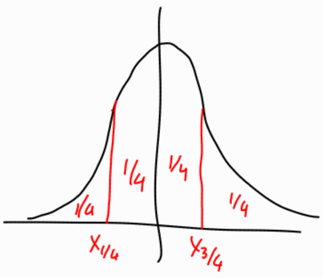
to je analog std. deviacije.



Zgleda: 1.) $X \sim N(0,1)$ $x_{1/2} = 0$

$\Phi(x_{3/4}) = 1/4 \Rightarrow x_{3/4} = 0,67$

$x_{1/4} = -0,67$ $s = 0,67$



2.) X ima Cauchyjevo porazdelitev:

$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ momenti ne obstajajo

$x_{1/2} = 0$ $\frac{1}{\pi}\int_0^{x_{3/4}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{x_{3/4}} = \frac{1}{4}$

$\operatorname{arctg} x_{3/4} = \pi/4$

$x_{3/4} = \tan \pi/4 = 1$

semiinterkvartilni razmik je zaradi simetričnosti 1, namreč $x_{1/4} = -1$

[B. Rodovne fje]

Naj bo X sl. spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N} \cup \{0\}$:

$p_k = P(X = k)$, $k = 1, 2, \dots$

Rodovna fja za X je definirana s $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ za tiste $s \in \mathbb{R}$, za katere vrsta absolutno konvergira. To je vsaj za $s \in [-1,1]$ ZDB konvergenčni polmer te vrste je vsaj 1: $|p_k \cdot s^k| \le p_k$ in $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Po primerjalnem kriteriju dobimo abs. konvergentno vrsto. Očitno je $G_X(0) = p_0$, $G_X(1) = 1$. Velja še $G_X(s) = E(s^X)$, saj je

$$s^X = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Zgledi: 1.) $X \sim geo(p)$: $p_t = P(X=t) = pq^{t-1}$, $t = 1,2,3,\dots$, $q = 1-p$

$$G_X(s) = \sum_{t=1}^{\infty} pq^{t-1} s^t = ps \sum_{t=1}^{\infty} (qs)^{t-1} = \frac{ps}{1-qs} \quad ; \quad |q \cdot s| < 1 \quad R = \frac{1}{q}$$

2.) $X \sim Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$; $p_t = P(X=t) = \frac{\lambda^t}{t!} \cdot e^{-\lambda}$ $t = 0,1,2,\dots$

$$G_X(s) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda} s^t = e^{-\lambda} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^t}{t!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

$R = \infty$