

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna.

$$Y = f \circ X = f(X): \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

1) $X \sim N(0,1)$, $f(x) = kx + n \Rightarrow Y \sim N(n, k)$

2) $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$, $f(x) = x^2$

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = 0, \text{ če je } y < 0.$$

Vzemimo $y \geq 0$. Potem je $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) =$
 $= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{\text{soda}}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

Tega integrala se ne da analitično izraziti. Gostoto pa lahko izračunamo kot odvod porazdelitvene f-je. Za to je

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}.$$

integranda izračunamo v zgornji meji $\sqrt{y}$ *odvod zgorajne meje*

torej vidimo, da je $Y \sim \chi^2(1)$ zOB Y porazdeljen po hi-kvadrat z eno prostostno stopnjo.

porazdelitev χ^2 (chi squared):
 $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}; & x > 0 \\ 0 & \text{; sicer} \end{cases}$

Trditev: če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pa zvezni f-ji, potem sta $U=f(X)$, $V=g(Y)$ zopet neodvisni slučajni spremenljivki.

Dokaz: $F_{(U,V)}(u,v) = P(\underbrace{f(X)}_{\in (-\infty, u]} \leq u, \underbrace{g(Y)}_{\in (-\infty, v]} \leq v) =$
 $= P(X \in f^{-1}((-\infty, u]), Y \in g^{-1}((-\infty, v])) \stackrel{\text{bodelova množica izlet od prej, ti ga nišno dokazali}}{=} \\$
 $= P(X \in f^{-1}((-\infty, u])) \cdot P(Y \in g^{-1}((-\infty, v])) =$
 $= P(f(X) \leq u) \cdot P(g(Y) \leq v) = F_U(u) \cdot F_V(v)$

$\Rightarrow U$ in V sta neodvisni slučajni spremenljivki. $\square$

[FUNKCIJE SLUČAJNIH VEKTORJEV]

Naj bo $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ slučajni vektor.

in $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zveza vektorsta fja. Potem je

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m) = f \circ X = f(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m. \text{ Torej}$$

je Y tudi slučajni vektor. Y je funkcija slučajnega vektora X .

Kako je porazdeljen Y ?

Vzemimo primer $n=2$ in $m=1$:

$\rightarrow$ komponenta; druga zveza z X od prej.

$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ slučajni vektor, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zveza fja.

Naj bo $Z = f(X, Y)$ slučajna spremenljivka. Potem je

$$F_Z(z) = P(f(X, Y) \leq z) = P((X, Y) \in f^{-1}([-\infty, z]))$$

Naj bo (X, Y) zvezo porazdeljen slučajni vektor z gostoto $P_{(X, Y)}(x, y)$. Torej je

$$F_Z(z) = \iint_{f^{-1}([-\infty, z])} P_{(X, Y)}(x, y) dx dy.$$

Oglejmo si primer, to je $f(X, Y) = X + Y$. Potem je

$$Z = X + Y \text{ in } F_Z(z) = \iint_{\{(x, y); x+y \leq z\}} P_{(X, Y)}(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} P_{(X, Y)}(x, y) dy dx \text{ in tedaj}$$

$$p_Z(z) = \frac{\partial F_Z(z)}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{(X, Y)}(x, z-x) \cdot 1 dx.$$

če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki,

$$\text{je } p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x) dx. \text{ KONVOLUCIJA } f_0 \text{ } p_X \text{ in } p_Y.$$

Naj bo poleg tega $X \sim \chi^2(n)$ in $Y \sim \chi^2(n)$ in sta neodvisni. Kako je porazdeljena vsota

$$Z = X + Y? \quad p_Z(z) = 0, \text{ če je } z \leq 0. \text{ Vzemimo torej } z > 0. \quad Z^2(n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}; & x > 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x) dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}.$$

$$\cdot \int_0^z x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{z}} \cdot (z-x)^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{z-x}{z}} dx = \frac{e^{-z/2}}{z^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot$$

$$\cdot \int_0^z x^{\frac{n}{2}-1} \cdot (z-x)^{\frac{n}{2}-1} dx = \frac{e^{-z/2} z^{\frac{n+1}{2}-1}}{z^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} \cdot (1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt =$$

$x = zt$
 $dx = z dt$

$\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} \cdot (1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{n}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})^2}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$

$$= \frac{z^{\frac{n+1}{2}-1} \cdot e^{-z/2}}{z^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})}, \text{ kar je } \chi^2(n+1).$$

s tem smo dokazali:

Trditveni: Neodvisni slučajni spremenljivki X in Y naj bosta porazdeljeni $X \sim \chi^2(n)$ in $Y \sim \chi^2(n)$. Tedaj je $X+Y \sim \chi^2(n+1)$.

Pogledica: če so $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ porazdeljene po $N(0,1)$. Tedaj je $Y := X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_n^2$ porazdeljena po razporeditvi $\chi^2(n)$ (zob hkrati pa je n prostostopni stepen).

Dokaz: Že vemo $X_i^2 \sim \chi^2(1)$ za vsak i .

$X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ so neodvisne slučajne spremenljivke.

po trditvi je potem $Y \sim \chi^2(\underbrace{1+1+\dots+1}_n)$.

Primer: Oglejmo si primer $m=n=2$. naj bo zvezan preslikava $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (u,v)$, kjer je $u=u(x,y)$ in $v=v(x,y)$, ki slučajni vektor (X,Y) preslika v zvezo porazdeljen slučajni vektor (U,V) , torej $U=u(X,Y)$, $V=v(X,Y)$. Označimo $A_{u,v} = [-\infty, u] \times [-\infty, v]$.

Tedaj je $F_{(u,v)}(u,v) = \iint_{A_{u,v}} p_{(u,v)}(s,t) ds dt$. Po drugi strani pa je

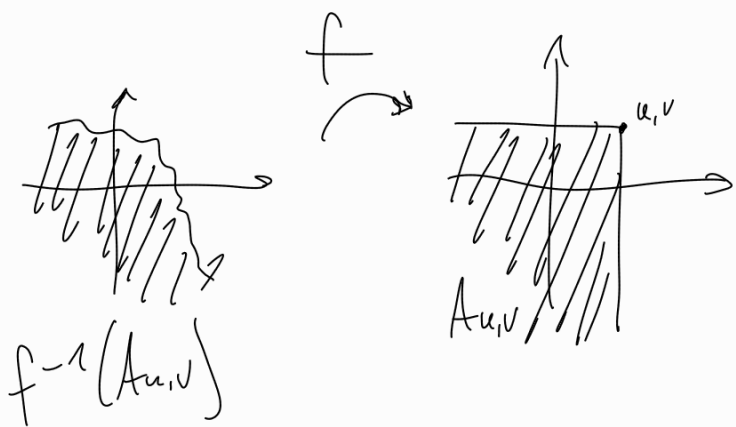
$$F_{(u,v)}(u,v) = P((U,V) \in A_{u,v}) =$$

$$= P(f(X,Y) \in A_{u,v}) =$$

$$= P((X,Y) \in f^{-1}(A_{u,v})) =$$

$$= \iint_{f^{-1}(A_{u,v})} p_{(x,y)}(x,y) dx dy$$

Priznamo, da je f zvezo dvodijiva bijekcija. Tedaj



je $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ neko odredjena preslikava. Z zamenjavo spremenljivk $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ v zadnjem integralu dobimo:

$$F_{(u,v)}(u, v) = \iint_{f^{-1}(A_{u,v})} p_{(x,y)}(s, t) \, ds \, dt = \iint_{A_{u,v}} p_{(x,y)}(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv$$

Kjer je $J(u, v)$ determinanta Jacobijev:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

Dobimo zvezo

$$F_{(u,v)}(u, v) = \iint_{A_{u,v}} p_{(u,v)}(s, t) \, ds \, dt \quad \text{in od tod sledi}$$

$$p_{(u,v)}(u, v) = p_{(x,y)}(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)|.$$

ogledamo si poseben poseben primer:

$$u = x$$

$$x = u$$

$$v = v(x, y)$$

ozivoma

$$y = y(u, v)$$

$$(t.j. u(x, y) = x)$$

$$(t.j. x(u, v) = u)$$

$$\text{Torej je} \quad J(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \quad \text{in}$$

$$p_{(u,v)}(u, v) = p_{(x,y)}(x(u, v) = u, y(u, v)) \left| \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right|$$

$$\text{gostota za } V \text{ je potem } p_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(u,v)}(u, v) \, du = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(x,y)}(u, y(u, v)) \left| \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right| \, du$$

Pisimo $Z = V$. Torej $y = y(x, z) \stackrel{y(u, v)}{=} y(u, v)$, saj je $V = X$.

Terdapat formula glasi $p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(x,y)}(x, y(x,z)) \left| \frac{\partial y}{\partial z}(x,z) \right| dx$