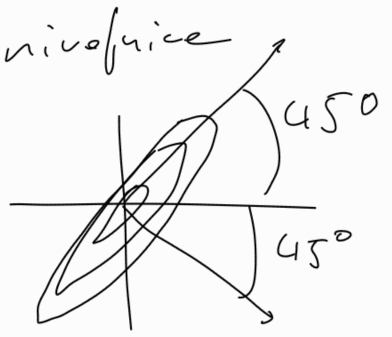
VRSPFMF 2025-11-27

prejšnjič sem manjkal. delali smo do normalno porazd.

$N(0,0,1,1,\rho)$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\rho & 0 \\ 0 & 1-\rho \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$(1,-1)$ je lave za $1+\rho$

$(1,1)$ je lave za $1-\rho$

D.N.: let $X \sim N(\mu, \overset{A>0}{A})$. preveri $\int_{\mathbb{R}^n} p_X(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 1$.

[7. Neodvisnost slučajnih spremenljivk]

Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots, X_n$ so neodvisne, če

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n)$$

za vse $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ oziroma

$$P(X_1 \le x_1, \overset{\text{presek dogodkov}}{\dots,} X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1) \cdots P(X_n \le x_n)$$

za vse $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ oziroma

dogodki $\{(X_1 \le x_1), \dots, (X_n \le x_n)\}$.

Vzemimo $n=2$ (dvorazsežen primer) in dokažimo

Trditev: let $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ diskretno porazdeljen slučajni vektor. Verjetnostne funkcije

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad p_i = P(X = x_i), \quad q_j = P(Y = y_j)$$

Potem sta X in Y neodvisni $\Longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall i,j: p_{ij} = p_i \cdot q_j$.

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$			p_1
x_2	p_{21}	p_{22}				p_2
$\vdots$			$\ddots$			$\vdots$
				p_{ij}	$\dots$	p_i
						$\vdots$
	q_1	q_2	$\dots$	q_j	$\dots$	1

Dokazati je treba, da $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y) \iff$

$\iff \forall i,j: p_{ij} = p_i q_j$.

$$(\Rightarrow)\quad p_{ij} = \lim_{h\downarrow 0} P(x_i - h < X \le x_i,\ y_j - h < Y \le y_j) =$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} F_{(X,Y)}(x_i, y_j) - F_{(X,Y)}(x_i - h, y_j) - F_{(X,Y)}(x_i, y_j - h) + F_{(X,Y)}(x_i - h, y_j - h) =$$

$$\overset{\text{neodvisnost}}{=} \lim_{h\downarrow 0} \big(F_X(x_i)\cdot F_Y(y_j) - F_X(x_i - h)\cdot F_Y(y_j) - F_X(x_i)\cdot F_Y(y_j - h) +$$
$$+ F_X(x_i - h) F_Y(y_j - h)\big) =$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} \underbrace{\big(F_X(x_i) - F_X(x_i - h)\big)}_{P(x_i - h < X \le x_i)} \cdot \underbrace{\big(F_Y(y_j) - F_Y(y_j - h)\big)}_{P(y_j - h < Y \le y_j)} =$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} P(x_i - h < X \le x_i) \cdot P(y_j - h < Y \le y_j) =$$

$$\overset{P\ \text{zvezna}}{=} P(X = x_i)\cdot P(Y = y_j) = p_i q_j$$

$$(\Leftarrow)\quad F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \le x,\ Y \le y) =$$

$$= P\Big(\bigcup_{i \ni: x_i \le x} \ \bigcup_{j \ni: y_j \le y} (X = x_i,\ Y = y_j)\Big) =$$

$$\overset{\text{št. aditivnost}}{=} \sum_{i \ni: x_i \le x} \ \sum_{j \ni: y_j \le y} p_{ij} \overset{\text{neodv}}{=} \sum_{i \ni: x_i \le x} \ \sum_{j \ni: y_j \le y} p_i q_j = \Big(\sum_{i \ni: x_i \le x} p_i\Big)\Big(\sum_{j \ni: y_j \le y} q_j\Big) =$$

$$\overset{\text{št. aditivnost}}{=} P(X \le x_i)\cdot P(Y \le y_j) = F_X(x)\cdot F_Y(y).$$

$\square$

Trditev: Naj $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ zvezno porazdeljen z gostoto $p_{(X,Y)}(x,y)$. Potem sta X in Y neodvisni $\Leftrightarrow$ $p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$ za „skoraj vse" $x, y \in \mathbb{R}$.

t.j. za vse razen končno mnogo točk.

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Vemo $F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Če odvajamo po x in po y, dobimo

$p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$.

$(\Leftarrow)$ integriramo $/ \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \dots$

Zgled: 20: $(X,Y) \sim N(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho)$,

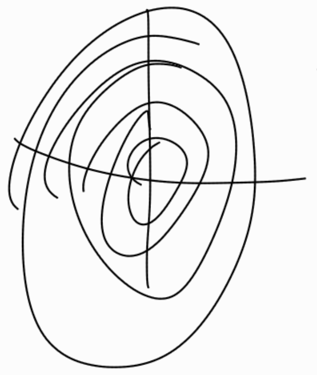
$\mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}, \sigma_X, \sigma_Y > 0, \rho \in (-1,1)$.

X in Y sta neodvisni $\Leftrightarrow \rho = 0$. Tedaj je

$$p_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)\right) =$$

$= p_X(x) \cdot p_Y(y)$, saj je $p_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2}$

$N(0,0,1,1,0)$ nivojnice



krožnice.

Trditev: Naj (X,Y) ~~zvezno~~ porazdeljen slučajni vektor. Tedaj sta X in Y neodvisni $\Leftrightarrow$ $\exists$ nenegativni integrabilni f-ji f in g $\ni$: $p_{(X,Y)}(x,y) = f(x) g(x)$ za vse $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dokaz: $(\Rightarrow)$ prejšnja trditev

$(\Leftarrow)$ $p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x,y)\, dy = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, dy$

$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x,y)\, dx = g(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$

Ker je $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = 1$, je $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1$.

zato je $p_X(x) \cdot p_Y(y) = f(x) g(x) = p_{(X,Y)}(x,y)$, torej sta X in Y neodvisna

Izrek: Slučajni spr. X in Y sta neodvisni $\Leftrightarrow$ za vsaki Borelovi množici A in B v $\mathbb{R}$ velja: dogodka $(X \in A)$ in $(Y \in B)$ sta neodvisna, tj.

(*) $\boxed{P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)}$

Dokaz: $(\Leftarrow)$ jasno: $A = (-\infty, x]$, $B = (-\infty, y]$.

(*) je tedaj $P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y)$

$(\Rightarrow)$ ne bomo dokazali

{8. Fje slučajnih spremenljivk in slučajnih vektorjev}

Naj $X: \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna.

$Y := \underline{f \circ X}$; $Y: \Omega \to \mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ to označujemo tudi kot $f(X)$

izkaže se, da je Y; $(Y(\omega) := f(X(\omega)))$; tudi slučajna spremenljivka (tega ne bomo dokazali, ni težko)

Rečemo ji: funkcija slučajne spremenljivke X.

Kako je Y porazdeljena, če vemo, kako je X?

Predpostavimo, da je f strogo naraščajoča z zalogo vrednosti (a,b), kjer je $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Potem je $F_Y(y) = P(f(X) \leq y)$.

$$F_Y(y) = P(f(X) \leq y) = \begin{cases} 1 \,; & \text{če } y \geq b \\ 0 \,; & \text{če } y \leq a \end{cases}$$

če $y \in (a,b)$, je $F_Y(y) = P(X \leq f^{-1}(y)) = F_X(f^{-1}(y))$.

Če je poleg vsega X še zvezno porazdeljen in f zvezna odvedljiva, je $\underset{\text{gostota}}{p_Y(y)} = \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_X(f^{-1}(y)) =$

$$= F_X'(f^{-1}(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(f^{-1}(y)) = p_X(f^{-1}(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(f^{-1}(y)),$$

Primer: $X \sim N(0,1)$, $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$f(x) = tx + u, \quad t > 0, \quad u \in \mathbb{R} \,; \quad f^{-1}(y) = \frac{y-u}{t}$$

$$Y = f(X) = t \cdot X + u.$$

$$p_Y(y) = p_X(f^{-1}(y)) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(f^{-1}(y)) = p_X\left(\frac{y-u}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-u}{t}\right)^2} \qquad Y \sim N(u,t).$$