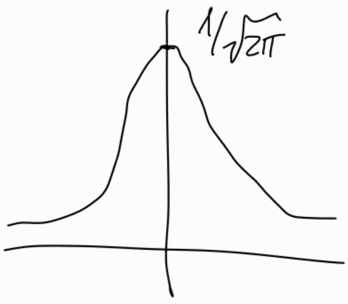
VRSPFMF2025-11-13

2) Normalna ali Gaussova porazdelitev

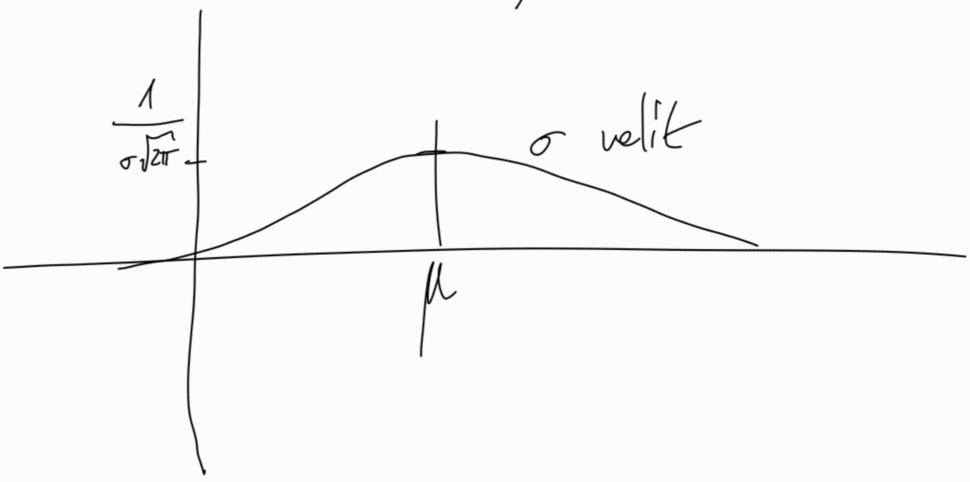
$$N(\mu, \sigma) \qquad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0.$$

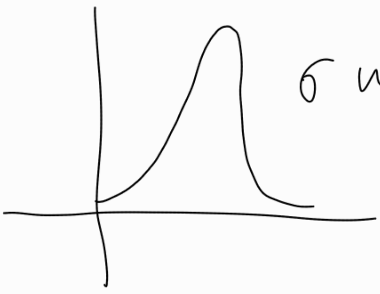
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$N(0,1)$: $\quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ je standardizirana normalna porazdelitev.




$N(\mu,\sigma)$ je samo razteg v smer $x$ za faktor $\sigma$ in v smeri $y$ za faktor $\frac{1}{\sigma}$ ter premik v smeri $x$ za $\mu$.




„verjetnostni integral"

spomnimo se $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$

tedaj je

$$F_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \cdots}_{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \cdots = \frac{1}{2} + \Phi(x)$$

$$F_{N(\mu,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-1/2\, u^2}\, du = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

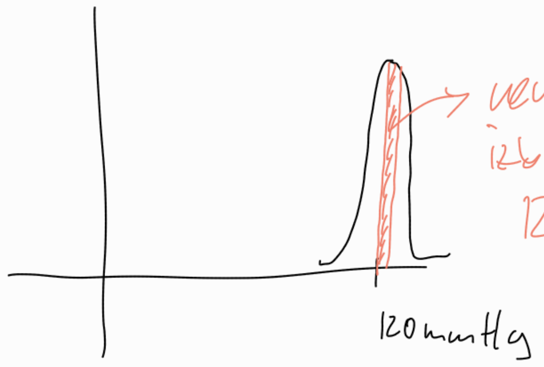
$$u = \frac{t-\mu}{\sigma}, \quad du = \frac{dt}{\sigma}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)$$

Laplaceova formula se glasi $Bin(n,p) \approx N(np, \sqrt{npq})$, saj smo imeli

$$P_n(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-1/2\left(\frac{t-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} = N(np, \sqrt{npq}).$$

zgled: sistolični krvni tlak ljudi je normalno porazdeljen

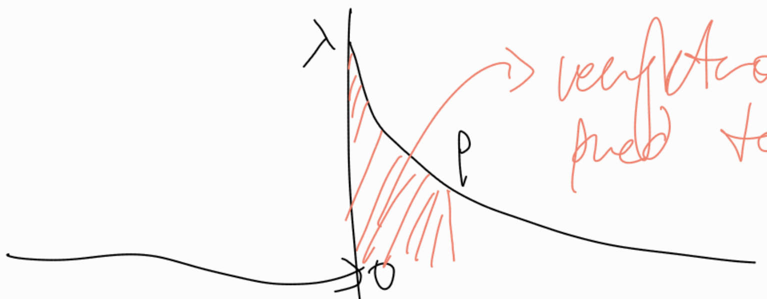



verjetnost, da ima naključno izbrana oseba tlak med 120-130 mmHg

$$P(\underset{120}{x_1} \le X \le \underset{130}{x_2}) = \int_{x_1}^{x_2} p(t)\,dt$$

3.) eksponentna porazdelitev $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; \text{če } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{če } x < 0 \end{cases}$$

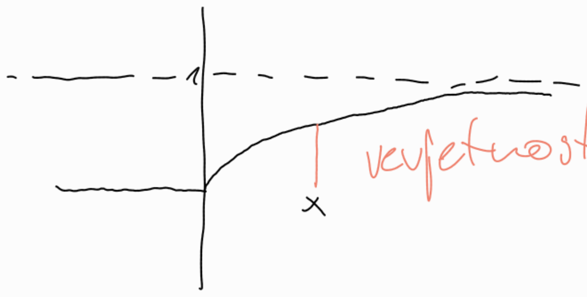



verjetnost, da se zgodi pred trenutkom $x$.

porazdelitvena fja:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} \quad ; \text{ torej } \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & ; \text{če } x \geq 0 \\ 0 & ; \text{če } x \leq 0 \end{cases}$$




verjetnost, da se zgodi pred trenutkom $x$

zgled: let $x$ potreben čas, da se neka/ zgodi, denimo radioaktivni razpad.

$$X \sim Exp(\lambda)$$

4.) Porazdelitev Gama $\Gamma(b,c)$, $b>0$, $c>0$.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-cx} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

očitno je $Exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$.

Preverimo $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$.

$$\frac{c^b}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} x^{b-1} e^{-cx}\,dx = \frac{1}{\Gamma(b)} \underbrace{\boxed{\int_0^{\infty} t^{b-1} e^{-t}\,dt}}_{\Gamma(b)} = 1$$

$t = cx$

$dt = c\,dx$

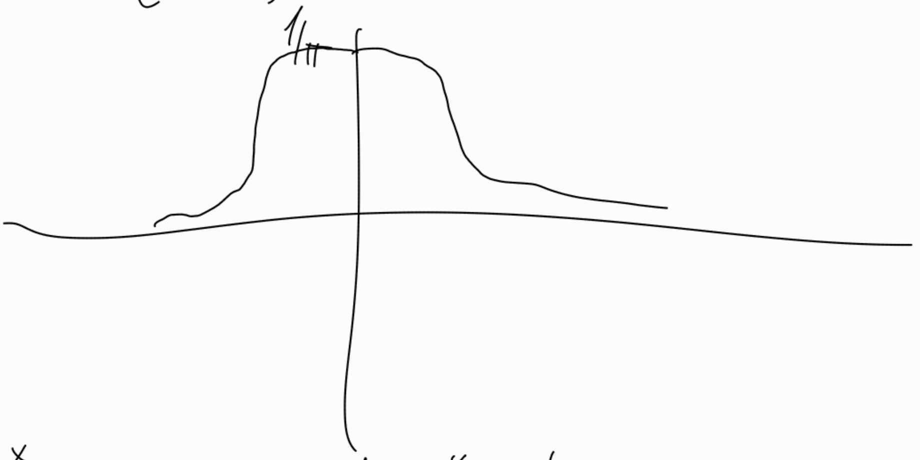
5.) Porazdelitev $\chi^2(\underbrace{n}_{\text{št. prostostnih stopenj}})$, $n \in \mathbb{N}$

$\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$, za $x > 0$ je

$$p(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \cdot x^{n/2 - 1} \cdot e^{-x/2}$$

6.) Cauchyjeva porazdelitev

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$




$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$

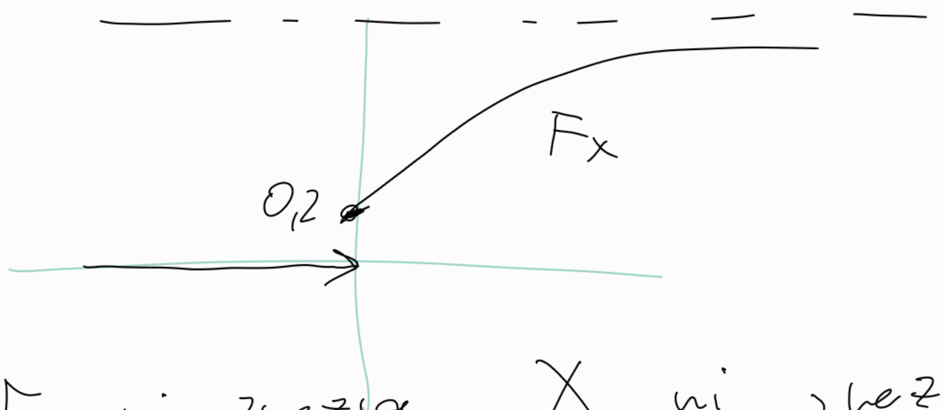
Zgled: Ko računalnik prejme ukaz za opravilo, je zaseden z verjetnostjo 0,8%. Opravilo nato zahteva nekaj časa, ta čas je porazdeljen eksponentno, $Exp(1)$.

Naj bo $X$ čas čakanja opravila.

Naj bo $B$ dogodek, da je računalnik prost takoj, $P(B) = 0{,}2$. Porazd. f-ja za $X$ je

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(B) \cdot P(X \le x \mid B) + P(B^c) \cdot P(X \le x \mid B^c) = 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot (1 - e^{-x}) =$$

$\mathrm{Exp}(\lambda)$: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, če $x \geq 0$:




Ker $F_X$ ni zvezna, $X$ ni zvezno porazdeljena.

Ker $F_X$ ni odsekoma konstantna, $X$ ni diskretno porazdeljena.

Torej obstajajo slučajne spremenljivke, ki niso niti diskretno niti zvezno porazdeljene.
Za take matematičnega upanja ne moremo definirati samo z Riemannovim integralom.

## [6. slučajni vektorji].

Definicija: slučajni vektor je $n$-terica slučajnih spremenljivk

$$X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$$
$$\omega \to (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

z lastnostjo, da je množica

$$(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) := \{\omega \in \Omega ; X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}$$

dogodek (se pravi $\in \mathcal{F}$) za vse $n$-terice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Njegova porazdelitvena fja je fja $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

Očitno je $0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Glede na vsako spremenljivko je naraščajoča in z desne zvezna.

Velja $\lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F_X(x_1, \dots, x_n) = 1$ in

$\forall i \in [n]\ \forall x_j,\ j \neq i: \lim_{x_i \to -\infty} F_X(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0$

če pošljemo proti $-\infty$ vsaj eno poljubno spr.

če pošljemo proti $\infty$ samo nekatere spremenljivke, dobimo porazdelitveno f/o slučajnega podvektorja (tistih spr., ki jih nismo poslali proti $\infty$)

$$\lim_{\substack{x_2 \to \infty \\ \dots \\ x_n \to \infty}} F_X(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1) = F(x_1)$$

To so robne ali marginalne porazdelitve.

Oglejmo si podrobneje primer $n=2$.

namesto $X_1$ pišimo $X$.

namesto $X_2$ pišimo $Y$.

$$(X, Y): \Omega \to \mathbb{R}^2.$$

$$\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

$$F_{(X,Y)}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

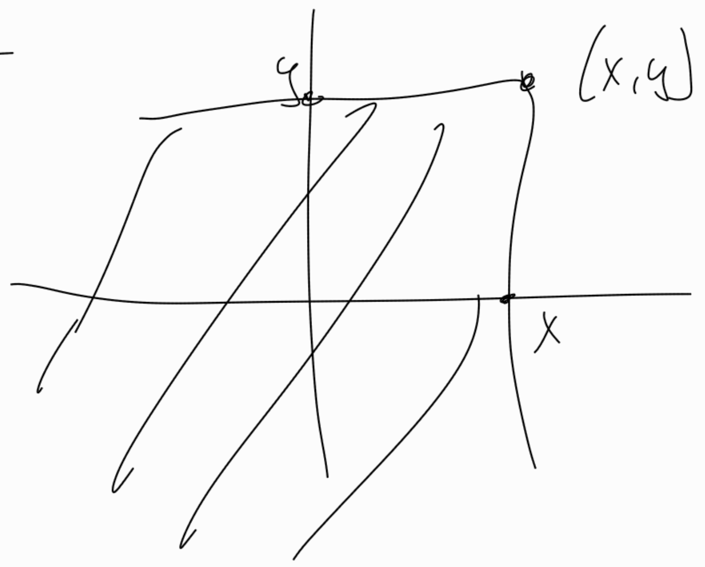
robni porazdelitvi sta tedaj:

$$\lim_{y \to \infty} F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \le x) = F_X(x)$$

$$\lim_{x \to \infty} F_{(X,Y)}(x,y) = P(Y \le y) = F_Y(y).$$

$(x,y) \Rightarrow$

$\Omega$



Za slučajno spr. $X$ velja

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Določimo analogno formulo v dvorazsežnem primeru. $P(a < X \leq b,\ c < Y \leq d) = ?$

naslednjič.