

VRSP F MF 2025-10-30

$B_n(t_1, t_2)$ dogodek, da se A zgodi vse $t_1 - t_{n+1}$ in manj kot $t_2 - t_{n+1}$: $0 \leq t_1 < t_2 \leq n+1$.

vse $B_n(t_1, t_2) = \bigcup_{t=t_1}^{t_2-1} A_n(t)$ (disjunktna unija)

$P_n(t_1, t_2) = P(B_n(t_1, t_2)) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} P_n(t)$. če upoštevamo

Laplaceovo lokalno formulo, dobimo

$$P_n(t_1, t_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-np}{\sqrt{npq}} \right)^2} =$$

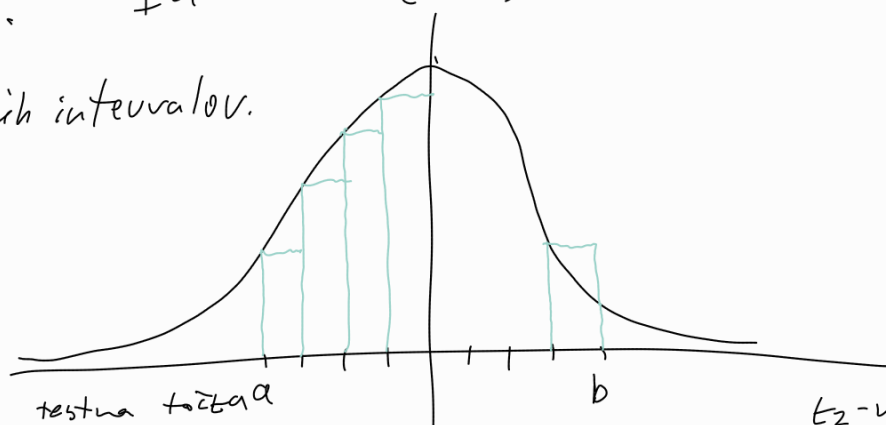
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} e^{-\frac{1}{2} x_t^2} \triangleq X_t, \text{ kjer je } X_t = \frac{t-np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Delta X_t = X_{t+1} - X_t = \frac{t+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{t-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

To je integralna vsota za fko $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

na intervalu $[a, b]$, kjer je $a = \frac{t_1-np}{\sqrt{npq}}$ in

$b = \frac{t_2-np}{\sqrt{npq}}$. Interval $[a, b)$ razdelimo na $t_2 - t_1$ enako dolgih intervalov.



ter velja nje vse $P_n(t_1, t_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t_1-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{t_2-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx$.

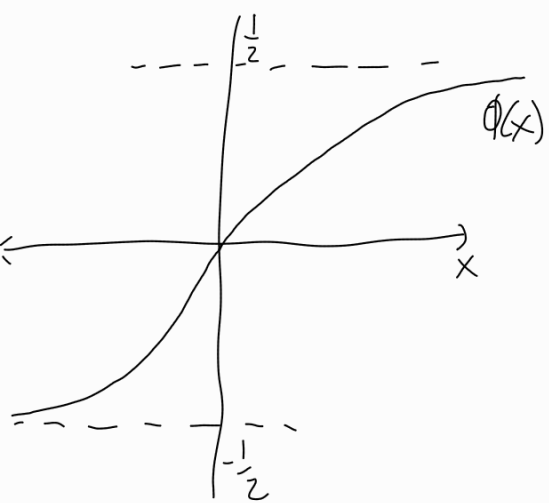
tega seveda analitično ugotoviti.

Upeljimo verjetnostni integral oz. fko variate:

$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Lastnosti Φ :

- je ličen (je integral sode od 0 do x)
- nestanovitnost zvezno odvedljiva $\Phi'(x) = f(x)$
- t je primitiva f za $t \geq 0$.



• ker $f > 0$, je Φ strogo narašč.

• $\Phi(0) = 0$

• $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}$

||

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{\sqrt{2u}} du =$$

$$u = \frac{t^2}{2} \quad t = \sqrt{2u} \\ du = t dt \quad dt = \frac{1}{\sqrt{2u}} du$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{-1/2} e^{-u} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}$$

Laplaceova integralna formula se tedaj glasi: za velike n

je $P_n(t_1, t_2) = \Phi\left(\frac{t_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{t_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$.

zadec / kalfinov semen): $n = 1000$ semen, $p = 0,05$, $q = 0,95$.
 E-litensko upravljanje, da vzeli več kot 950 semen?

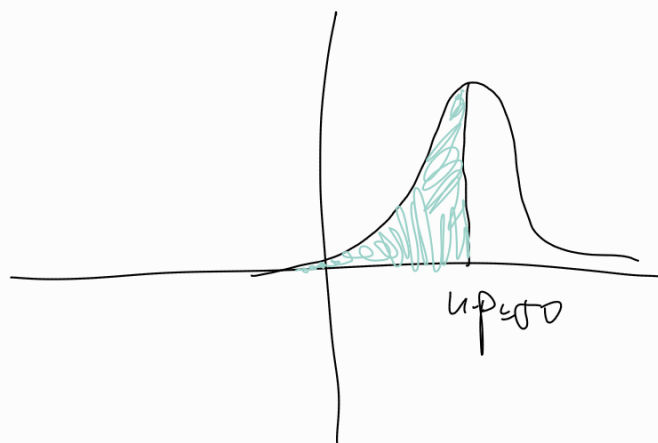
$P(\text{vzeli več kot } 950 \text{ semen}) =$

$= P(\text{ve vzeli več kot } 950) = P_{1000}(0,50) = \Phi\left(\frac{950 - 50}{\sqrt{50 \cdot 0,95}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 50}{\sqrt{50 \cdot 0,95}}\right) =$

$t_1 = 0, t_2 = 950$
 $np = 50$

$\approx +\Phi(7,36) \approx 0,4999 \approx 0,5000$

to je plati



[5. SLUČAJNE SPREME NLJIVE]

Danem postanu določimo številsko količino, katere vrednost je odvisna od slučaja.

Zgleda: 1.) net tocke; št. p.č.
2.) stvarjanje v tavi; vzdolga zadetko od srednjem tavi

Def: slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je f.f.a $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ z lastnostjo,

da $\forall x \in \mathbb{R}: \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$, se pravi se dogodek.

Zgled: net tocke: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $X: \omega \mapsto \omega$, $\omega \in \{1-6\}$ je slučajna spremenljivka.

Def: naj bo X slučajna spremenljivka. Povzdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je f.f.a

$F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Lastnosti povzdelitvene f.f.e $F = F_X$:

1.) $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2.) F je naraščajoča, t.j. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

Pokaži: $F(x_1) = P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2) = F(x_2)$

$$\uparrow$$
$$(X \leq x_1) \subseteq (X \leq x_2)$$

in P je monotona.

3.) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Pokaži: izberimo zaporedje $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, ki narašča brez
proti ∞ . Potem je $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) =$
 $= P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq x_n\})$

$$= P\left(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \leq x_n)}_{\Omega}\right) = P(\Omega) = 1$$

4.) F je z desne zvezna, t.j. $F(x+) = F(x)$.

$$\text{t.j. } \forall x \in \mathbb{R}: F(x+) = \lim_{h \downarrow 0} F(x+h).$$

Potenz: Vzemimo zaporedje $\{x_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$, ki stogo pada proti x . Teda, je

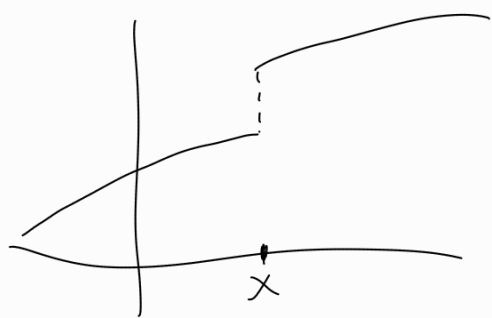
$$F(x+) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq x_n) \text{ in}$$

P zmanjšuje
↑

$$= \underbrace{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \leq x_n)\right)}_{(X \leq x)} = P(X \leq x)$$

$\{X \leq x_n\}_n$ je
padajoče zaporedje

$$5.) F(x-) = P(X < x) < P(X \leq x) = F(x)$$



razlika $F(x) - F(x-)$ je

$$P(X \leq x) - P(X < x) = P(X = x)$$

$$\text{torej } P(x_1 < X \leq x_2) = P((X \leq x_2) \setminus (X \leq x_1)) =$$

$$= P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2-) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1-)$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2-) - F(x_1-)$$

Najpomembnejša razreda slučajnih spremenljivk sta:

A.) Diskretne slučajne spremenljivke:

Slučajna sprem. X je diskretna, če je njena zloga vrednosti končna ali števna množica.

Na) bo $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ zloga vrednosti slac. spv. X .

Vpeljimo verjetnostno funkcijo:

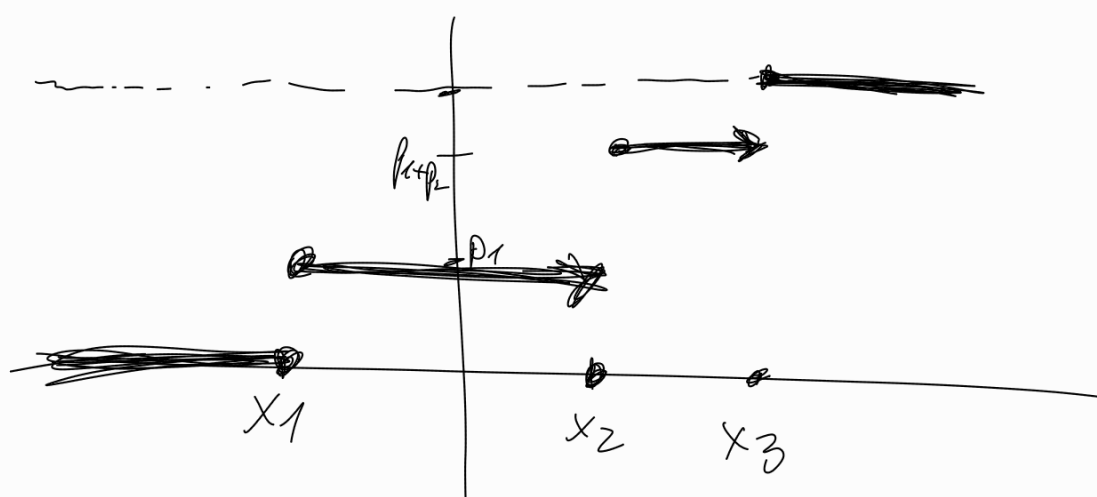
$p_k = P(X = x_k), k = 1, 2, \dots$ in X predstavimo s
shemo: $X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \text{verjetnosti}$

ker $\{P(X = x_k)\}_k$ popoln sistem dogodkov, je

$\sum_k p_k = 1$. Povezdelikalec $F(x) =$

$$= P(X \leq x) = P\left(\bigcup_{k: x_k \leq x} (X = x_k)\right) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k$$

zgod: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \quad p_1 + p_2 + p_3 = 1 \quad x_1 < x_2 < x_3$



Posebne distriktne porazdelitve:

1.) enakomerno distriktne porazdelitev na n točkah.

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots \end{pmatrix}$$

zgod: vsa točka:
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

2.) Bernoullijeva porazdelitev: $Bev(p), p \in (0, 1)$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \quad q = 1 - p$$