

VRSPFME2025-10-23

Def. dogodka A in B sta neodvisna, če
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Če je $P(B) > 0$, je temu
ekvivalentno $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$

končna dogodkov $\{A_i\}_{i \in I}$ je neodvisna,
če za poljuben točen nabor različnih dogodkov

$$A_{i_1}, \dots, A_{i_k} \text{ velja } P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

če vzamemo samo za $k=2$, t.j.

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad \text{za } i \neq j, \text{ imamo}$$

pravna neodvisno končino.

Končna je očitno pravna neodvisna, vendar
to je neodvisna. Ne velja pa nujno
obratno:

zgled: $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ (kot posamezna tetraedra)

$$P(\{i\}) = \frac{1}{4} \text{ za } i \in \Omega. \quad A = \{1, 2\} \quad B = \{1, 3\} \quad C = \{1, 4\}$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

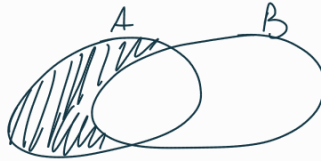
$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\{A, B, C\}$ so pravna neodvisne, toda ne
neodvisne, saj:

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A) P(B) P(C)$$

Trditev: Če sta A in B neodvisna dogodka,
sta neodvisna tudi dogodka A in B^c , A^c in B
in A^c in B^c .

Dokaz: Dokazati je treba le $\{A, B\}$ neodv. $\Rightarrow$

$$\{A, B^c\} \text{ neodv.: } P(A \cap B^c) =$$

$$= P(A \setminus A \cap B) =$$

$$\stackrel{c.s.}{=} P(A) - P(A \cap B) \stackrel{neodv.}{=} P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$$

[zahteva neodvisnih ponovitev poskusa]

imejmo n neodvisnih ponovitev poskusa, kjer za dogodek A velja $P(A) = p \in (0, 1)$. Naj bo $q = P(A^c) = 1 - p$.

zglede: Vžemo točko n -krat in gledamo gestic. kolikšna je verjetnost, da pride gestic t -krat?

Z $A_n(t)$ označimo dogodek, da se A zgodi t -krat v n poskusih. $t \in \{0, \dots, n\}$.

Pokažimo, da je $P(A_n(t)) =: P_n(t) = \binom{n}{t} p^t q^{n-t}$ (Bernoullijeva formula).

$A_n(t)$ je disjunkcija n dogodkov, da se A zgodi na predpisanih t mestih, verjetnosti teh so pa $p^t q^{n-t}$.

zglede: Kalifornija senen je 95%. Kolikšna je verjetnost, da izmed 1000 senen v zavočetu vzeli točno 950 senen.

A dogodek, da sene vzeli. $P(A) = p = 0,05$.

$q = 0,95$, $n = 1000$, $t = 50$

$$P_{1000}(50) = \binom{1000}{50} 0,05^{50} 0,95^{950} = 0,05779$$

Approximativni formuli za $P_n(t)$:

a.) Poissonova formula: za $p \ll 1$ in $n \gg 1$, je $P_n(t) \approx \frac{\lambda^t}{t!} e^{-\lambda}$, kjer $\lambda = n \cdot p$

Pokaži: $P_n(t) = \binom{n}{t} p^t q^{n-t} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-t+1)}{t!} \cdot \frac{1^t}{n^t} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-t} =$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

→ prvi 1
→ prvi e-1
→ prvi 1 za velik n

$$\approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Potazali smo tore: če $n \cdot p_n \rightarrow \lambda$, potem je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Stirlingova formula: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

če $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n = 1.$$

zgod.: (kalkulacija anek)

$$P_{1000}(50) \stackrel{\text{Poisson}}{\approx} \frac{50^{50}}{50!} e^{-50}$$

b.) Laplaceova lokalna formula:

za $n \gg 1$ je

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

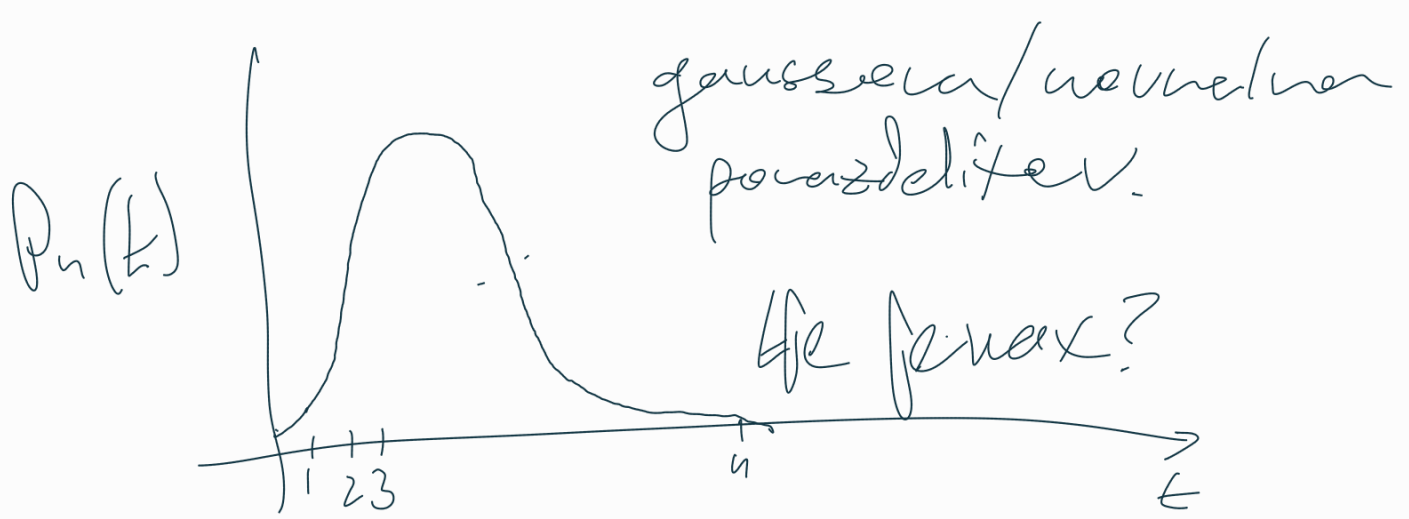
Kasneje bomo dokazali splošnejši izrek, imenovan centralni limitni izrek.

Navidimo torej zaporedje $\{P_n(k)\}_{k=0}^n$

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P_n(0) = q^n \quad P_n(1) = n p q^{n-1} \quad \dots \quad P_n(n) = p^n$$

navidimo:



za katero t je $P_n(t) \leq P_n(t+1)$?

$$\Leftrightarrow \frac{P_n(t+1)}{P_n(t)} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(t+1)!(n-t-1)!} \cdot \frac{t!(n-t)!}{n!} \cdot \frac{p^{t+1}}{p^t} \cdot \frac{q^{n-t-1}}{q^{n-t}} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-t}{t+1} \cdot \frac{p}{q} \geq 1 \Leftrightarrow np - t p \geq tq + q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow np \geq t + q \rightarrow \text{načrta, med } (0,1), t \text{ pa je } t \in \mathbb{Z}.$$

točje je maksimum večje od 1 up.
↳ je celo št!

Beauvillifera funkcija:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

zgod (kalkulacija senen):

$$P_{1000}(50) \stackrel{\text{Laplace}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 50 \cdot 0,95}} = \frac{1}{\sqrt{95\pi}} = 0,05788$$

[Laplacova integralna formula]

zanima nas dogodek $B_n(t_1, t_2)$, t.j. da se
v u poročilih A zgodi vsa $t_1 - t_2$ in manj

Welfati: $\sum_{k=1}^n 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$

Definition für $B_n(t_1, t_2) = \bigcup A_n(t)$. $t \in [t_1, t_2]$

Unif. Disf. fctn, $t=t_1$ $\Rightarrow$ $P_n(t_1, t_2)$