

VRSPAMF 2025-10-16

Verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Primer: Končni ali števni verjetnostni prostor:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \quad \mathcal{F} = 2^\Omega$$

tedaj je $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots$ popoln sistem dogodkov

če je $p_i := P(\{\omega_i\})$ za $i = 1, 2, \dots$, je potem za
vsako $A \subseteq \Omega$: $A = \bigcup_{i: \omega_i \in A} \{\omega_i\}$ in $P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$

zavadi torej in števce aditivnosti preslikane P .

za negativna števila $\{p_i\}$ mora veljati

$$\sum_i p_i = P(\Omega) = 1$$

če ima Ω n elementov in $p_i = \frac{1}{n}$ za $i = 1, 2, \dots, n$,
je $P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{\text{moč}(A)}{n}$.

To je tlaščim definicija verjetnosti.

Primer: (nestrojni) nestrojni verjetnostni prostor,
npr. primer srečanja dveh oseb.

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

$\mathcal{F}$ = najmanjša σ -algebra, ki vsebuje vse
odprte pravokotnike $(a, b) \times (c, d)$

to σ -algebra imenujemo Borelova
 σ -algebra in ni omejena 2^Ω .

opomba: ta $\mathcal{F}$ je isti kot najmanjša σ -algebra,
ki vsebuje vse zaprte pravokotnike $[a, b] \times [c, d]$.

Petitivnašno verjetnostno preslitavo P na pravototritih: $P((a,b) \times (c,d)) = (b-a)(d-c)$
 $\uparrow$
 platiina.

možno je dokazati, da je P lahko razširini do stereo aditivne preslitave P na F .

prav tako se da pokazati, da se P ne da razširiti do stereo aditivne preslitave P na 2^{Ω} (argument se stikaže na aksiom izbire).

to je geometrijska definicija verjetnosti.

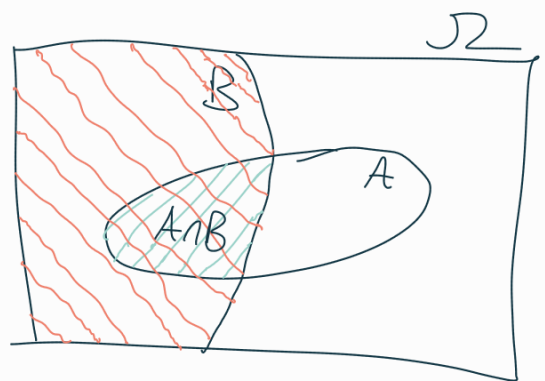
[pogojna definicija verjetnosti]

fiksna dogodek B s $P(B) > 0$.

Pogojna verjetnost dog. A pri pogoju B je $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

predstavljamo si to

$\frac{\text{platiina } A \cap B}{\text{platiina } B}$



Primer: V posodi sta dve kuli iz ena črna kroglica. Prvačat zafaradoma izberemo po eno kroglico, ju čerem kroglice vrataamo. Kolikšna je verjetnost, da suu drugič izbrali belo, če suu prvič izbrali belo?

Vsi izidi:

$B_1 B_1$	$B_1 B_2$	$B_1 \bar{C}$
$B_2 B_1$	$B_2 B_2$	$B_2 \bar{C}$
$\bar{C} B_1$	$\bar{C} B_2$	$\bar{C} \bar{C}$

$B \dots$ prvič izberemo belo

$A \dots$ drugič izberemo belo

$$P(B) = \frac{6}{9} \quad P(A \cap B) = \frac{4}{9}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/9}{6/9} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Iz definicije sledi $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

za 3 dogodke A, B, C točno velja

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cap C)) &= P(B \cap C) \cdot P(A | (B \cap C)) = \\ &= P(C) \cdot P(B|C) \cdot P(A | (B \cap C)) \end{aligned}$$

za dogodke $A_1, A_2, \dots, A_n$ velja:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) \cdot \\ &\dots \cdot P(A_n | (A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})) \end{aligned}$$

Dokaz: Desna stran je:

$$\begin{aligned} &\frac{P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}}{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} = \\ &P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Zgled: V posodi je 6 modrih, 5 rdečih in 4 zelene kroglice. Slučajno izberemo 3. Kolikšna je verjetnost, da so vse rdeče?

A_k : k -ta kroglica je rdeča, $k=1, 2, 3$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) = \\ &= \dots = \frac{2}{91} \end{aligned}$$

$$2. \text{ način: } P(\text{vse 3 rdeče}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \dots = \frac{2}{91}$$

Imajmo poskus, ki ga izvajamo v dveh točkah (fazah). V prvem se zgodi natanko en iz polnega sista dogodkov $H_1, H_2, \dots$; t.j. $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ in $\bigcup_i H_i = \Omega$. V drugem točkah gledamo dogodek A : izvašena $P(A)$ z verjetnostmi $P(H_1), P(H_2), \dots$ in z verjetnostmi $P(A|H_1), P(A|H_2), \dots$:

$$\begin{aligned} \text{velja } A &= A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \dots) = \\ &= \underbrace{A \cap H_1 \cup A \cap H_2 \cup \dots}_{\text{pavna razdelitev (razni preeti pavna)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A) &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \dots = \\ &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots \end{aligned}$$

Zgled: V srečelcu je n sneč, od tega je m dobrih. $m < n$. Ali imamo pred začetkom srečelca vse možnosti za dobiti, če izbiramo prvi ali če izbiramo drugi.

$$\begin{aligned} P(\text{prvi dobi}) &= \frac{m}{n} \\ P(\text{drugi dobi}) &= \underbrace{P(\text{prvi dobi})}_{H_1} \cdot \underbrace{P(\text{drugi dobi} | \text{prvi dobi})}_{A|H_1} \\ &\quad + \underbrace{P(\text{prvi ne dobi})}_{H_2 = H_1^c} \cdot \underbrace{P(\text{drugi dobi} | \text{prvi ne dobi})}_{A|H_2} \\ &= \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n} \cdot \frac{m}{n-1} = \dots = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

Pogosto nas zanima:

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k | A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A | H_k)}{\sum_i P(H_i) P(A | H_i)}$$

BAYESOVA
FORMULA

Primer: Test s poligrafom (=detektorjem laži)

Resničnost opravi test s poligrafom z verjetnostjo 0,95
 ↳ se ne laže.

~~z enako verjetnostjo poligraf prepozna lažnivca~~

(med 1000 oseb, med katerimi je en lažnivec, slučajno izberemo eno osebo, ti jo poligraf proglasi za lažnivca. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je ta oseba zares lažnivec?)

upoštevamo 2 dogodka:

L je dogodek, da je izbrana oseba lažnivec.
 t.j. $P(L) = \frac{1}{1000}$

L_p je dogodek, da osebo poligraf proglasi za lažnivca. Zanima nas $P(L | L_p)$.

2. stanje v unlogi: $P(L_p | L) = 0,95$

1. stanje v unlogi: $P(L_p | L^c) = 0,05$

$$P(L | L_p) = \frac{P(L) \cdot P(L_p | L)}{P(L) \cdot P(L_p | L) + P(L^c) \cdot P(L_p | L^c)} =$$

$\begin{matrix} H \\ // \\ H \end{matrix} \quad \begin{matrix} // \\ A \end{matrix}$

$H_2 = L^c$

$$= \frac{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{5}{100}} = \frac{95}{5090} = 0,02$$