VRSPFMF2025-10-09

5. de Morganova zakona:

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Še več:
- $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$
- $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

V splošnem ni vsaka podmnožica v Ω dogodek.

Def.: Neprazna družina dogodkov (podmnožic Ω) F je σ-algebra (sigma algebra), če

1.) $A \in F \Rightarrow A^c \in F$

2.) $A_1, A_2, A_3, \ldots \in F \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ (zaprtost za števne unije)

2*.) če velja le $A, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$, je F algebra. (brez σ)

v algebri imamo zaprtost za končne unije. (indukcija)

3.) Ker je $\bigcap_i A_i = \left(\bigcup_i A_i^c\right)^c$, je algebra zaprta za končne preseke, σ-algebra pa ~~za~~ števne preseke. (sledi iz 1 in 2)

Dokaz za σ-algebro:

$A_1, A_2, \ldots \in F \overset{(1)}{\Rightarrow} A_1^c, A_2^c, \ldots \in F \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in F \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c \in F$

$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Zakaj dopuščamo, da podmnožice množice izidov Ω niso nujno dogodki? Kaj je primer postopka, kjer obstaja neka podmnožica Ω, ki ni dogodek?

4.) Algebra je zaprta za razlike dogodkov, ker $A \setminus B = A \cap B^c$:

$A, B \in F \Rightarrow A \setminus B \in F$

5.) Vsaka algebra vsebuje $\emptyset$ in Ω. Ker je F neprazna, je $A \in F$, $A^c \in F$, $A \cup A^c = \Omega \in F$,

$\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in F$.

primer: $\{\emptyset, \Omega\}$ je algebra in σ-algebra.

(in to najmanjša možna) (mimogrede: jasno $\mathcal{A}$ σ-algebra $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ algebra)

primer: 2^Ω je algebra in σ-algebra

(in to največja možna)

vprašanje. Fiksirajmo E t.d. $\emptyset \neq E \neq \Omega$. Kaj je najmanjša σ-algebra, ki vsebuje E?

$\{\emptyset, E, E^c, \Omega\}$.

vprašanje. Vzemimo $\Omega = \mathbb{N}$. Kaj je najmanjša σ-algebra, ki vsebuje vse singletone v $2^{\mathbb{N}}$?

To je $2^{\mathbb{N}}$. Naj bo $F :=$ najmanjša algebra, ki vsebuje singletone v $2^{\mathbb{N}}$.

gotovo obstaja: je presek vseh ustreznih

Dokažimo $F = G := \{A \subseteq \mathbb{N} ; A$ končna ali A^c končna $\}$.

Očitno $G \neq 2^{\mathbb{N}}$, kajti recimo soda števila niso v G. (niti soda št. niti njihov kompl. ni končna).

Dokažimo najprej, da je G algebra:

- neprazna ✓

1.) zaprta za $\square^c$?

let $A \in G$:

case A končna:

$(A^c)^c = A \Rightarrow A^c \in G$

case A^c končna:

$A^c \in G$ velja ✓.

2*.) $A, B \in G \Rightarrow A \cup B \in G$

case obe končni: unija končnih je končna.

case A nekončna, B poljubna:

ker $A \in G \Rightarrow A^c$ končna

opazimo $(A \cup B)^c \subseteq A^c$

torej $(A \cup B)^c$ končna $\Rightarrow A \cup B \in G$

torej je očitno G algebra, ki vsebuje vse singletone. Velja $F \subseteq G$ (ker F po definiciji najmanjša taka).

Želimo dokazati $F = G$, torej $F \supseteq G$.

$G \subseteq F$: naj bo $A \subseteq G$ poljuben. dokažimo $A \in F$.

case A končna:

$$A = \bigcup_{t \in A} \{t\} \Rightarrow A \in F \text{ po def. } F$$

case A^c končna:

$$A = \Big(\underbrace{\bigcup_{t \in A^c} \{t\}}_{\text{končna unija}}\Big)^c \Rightarrow A \in F$$

Trditev (dodatna, neobvezna): Za družino podmnožic množice D obstaja najmanjša algebra F, ki jo vsebuje.

Dokaz: $F := \bigcap_{\substack{G \text{ algebra} \\ D \subseteq G}} G$ neprazen, če $G = 2^\Omega$

presek algebe je algebra $\square$.

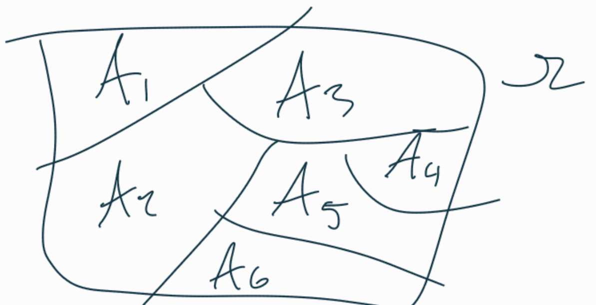
Def.: Dogodka A in B sta nezdružljiva (disjunktna), če je $A \cap B = \emptyset$ i

$\emptyset$ je nemogoč dogodek, Ω je gotovi dogodek } pravimo

Def.: zaporedje dogodkov $A_1, A_2, \ldots$ (končno ali števno mnogo) je POPOLN SISTEM DOGODKOV, če

$\bigcup_i A_i = \Omega$ in $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ za $i \neq j$.

v teoriji množic temu pravimo razbelitev ali particija (glej KOMB http://4a.si/komb).



Def.: naj bo F σ-algebra na Ω. Verjetnost na (Ω, F) je realna funkcija $P: F \to \mathbb{R}$, za katero velja:

1.) $\forall A \in F: P(A) \geq 0$ (nenegativnost)
2.) $P(\Omega) = 1$ (normiranost)
3.) za poljubne paroma nezdružljive dogodke $A_1, A_2, \dots$
velja $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. (števna aditivnost)
namesto končna

Trditev: Lastnosti preslikave P:

a.) $P(\emptyset) = 0$

Dokaz: V 3.) vzamemo $A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$.
(očitno paroma nezdr.)
dobimo

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$0 = \underbrace{P(\emptyset)}_{\geq 0} + \underbrace{P(\emptyset)}_{\geq 0} + \dots \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

b.) P je končno aditivna; t.j. za poljubne paroma nezdružljive dogodke $A_1, \dots, A_n$ velja $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Dokaz: dopolnimo $A_1, \dots, A_n$ do števnega zaporedja z neskončno členi $\emptyset$ in uporabimo 3.)

c.) P je monoton, t.j. za $A \subseteq B$ velja $P(A) \leq P(B)$. Še več: iz $A \subseteq B$ sledi $P(B \setminus A) \overset{\geq 0 \Rightarrow}{=} P(B) \overset{\geq}{-} P(A)$.

Dokaz:

ker $B = A \cup (B \setminus A)$ in $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, je vsled b.) $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

$$\Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

d.) $P(A^c) = 1 - P(A)$

$$P(A^c) = P(\Omega \setminus A) \overset{c.)}{=} P(\Omega) - P(A) \overset{2.)}{=} 1 - P(A)$$

e.) P je zvezna, t.j. za $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$, kjer $A_i \in F$ velja $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$.

ii.) in za $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$,

tj. $B_i \in F$ velja $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \to \infty} P(B_n)$

Dokaz: i.) Definirajmo $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ za $i \geq 2$ in $C_1 = A_1$. Seveda so C_i tudi dogodki in paroma nezdružljivi. Velja tudi

$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ in jasno

$A_n = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$. Sledi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \overset{3.)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} P(C_i) \overset{b.)}{=} \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

ii.) Ker $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$, je $B_1^c \subseteq B_2^c \subseteq \cdots$ in zato po i.) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c\right) = \lim_{n \to \infty} P(B_n^c)$.

Toda $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)^c$, zato je

$1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - P(B_n)\right)$, od koder sledi enakost.

$\square$

Def.: $(\Omega, F, P: F \to \mathbb{R})$ je verjetnostni prostor.