VRSPFMF2025-10-02

meta: priporočeni učbeniki: M. Hladnik: verjetnost in statistika
grimett, welsh: probability: an introduction

izpitni režim: 3 kolokviji: 50% ocene (pisno)

primeri na moodlu — teoretični testi: 50% ocene (pisno)

tedaj lahko obiščeš poljuben teoretični rok

namesto kolokvijev lahko kolokvijski del opravimo s tremi izpitnimi roki. (pisno)

tedaj lahko obiščeš le pripadajoči teoretični rok

I. VERJETNOST

[1. neformalni uvod v verjetnost] kratek zgodovinski uvod:

začetki v 17. stoletju: Fermat, Pascal, Bernoulli

v 18. in 19. stol.: Laplace (FR), Poisson (FR), Markov (RU), Čebišev (RU)

v 20. stol.: Kolmogorov

Pri verjetnosti izvajamo poskus in pri njem opazujemo določen pojav, imenovan dogodek. Npr.: poskus: met kocke, pojav: pade 6.

TRI DEFINICIJE VERJETNOSTI:

1. poskus ponovimo n-krat in opazujemo dogodek A.
   naj bo $K_n(A) \in \{0..n\}$ frekvenca dogodka A.
   naj bo $f_n(A) := \frac{K_n(A)}{n} \in [0,1]$ relativna frekvenca dogodka A.

   po izreku o velikih številih (kasneje) je moč dokazati, da $\{f_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira. naj bo $p := \lim_{n\to\infty} f_n(A)$

   statistična definicija verjetnosti dogodka A je $P(A) := p$.

2. Često lahko verjetnost določimo vnaprej: klasična definicija verjetnosti: $P(A) := \frac{\text{št. ugodnih izidov za dogodek } A}{\text{št. vseh izidov}}$ pri pogoju, da imajo vsi izidi enake možnosti, da se zgodijo in da je vseh izidov končno mnogo.

   Primer: • met poštenega kovanca: $P(\text{grb}) = \frac{1}{2}$ → ugoden, → možnih izidov $|\{C, G\}|$

   • met dveh kock: kolikšna je verjetnost, da pri metu dveh kock znaša vsota točno 7?
   možne vsote $\{2..12\}$. Toda iskana verjetnost ni $\frac{1}{11}$, ker vsote niso enako verjetne.
   vzemimo raje urejene pare:

11	12	...	16
21	22	...	26
⋮	⋮	⋱	⋮
61	62	...	66

   vseh izidov je $6\times 6 = 36$
   ugodnih je 6
   torej $P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

3. Če je izidov neskončno mnogo, lahko uporabimo geometrijsko definicijo verjetnosti.

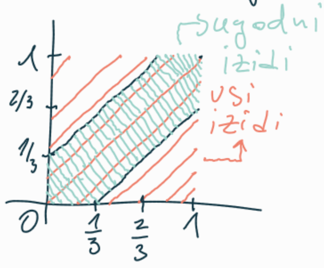
zgled: osebi se dogovorita za sestanek med 10. in 11. uro. čas prihoda posamezne osebe na sestanek je slučajen.

dogovorita se, da vsak čaka na drugega največ 20 minut, seveda najdlje do 11. ure. Če v tem času drugega ni, oseba odide. Kolikšna je verjetnost srečanja?

Zaradi enostavnosti začnimo čas šteti od desetih in to v urah, se pravi je čas prihoda $\in [0,1]$.

Naj bo x čas prihoda I. osebe in y čas prihoda II. osebe.

Množica vseh izidov je $[0,1]\times[0,1]$:



pogoj za sestanek $|x-y| \le \frac{1}{3}$

case $x \ge y$: $x - y \le \frac{1}{3}$

$x - \frac{1}{3} \le y$

case $x \le y$: $y - x \le \frac{1}{3}$

$y \le x + \frac{1}{3}$

$$P(\text{srečanja}) = \frac{\text{ploščina označenega lika}}{\text{ploščina kvadrata}} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \frac{5}{9}$$

Primer: imejmo n kroglic in m posod, da je $m > n$.

Slučajno razporedimo kroglice v posode. Kakšna je verjetnost, da so vse kroglice v prvih n posodah ($\Rightarrow$ v vsaki 1).

Ni še natanko določeno, kaj pomeni „slučajna razporeditev kroglic v škatle". Oglejmo si tri možnosti:

glej KOMB: http://4a.si/komb

a.) kroglice razlikujemo: vseh izidov je m^n (variacije s ponavljanjem)

ugodnih izidov je $n!$ (permutacije)

iskana verjetnost je $\frac{n!}{m^n}$

b.) kroglic ne razlikujemo in dopuščamo kvečjemu eno v posamezni posodi: vseh izidov je $\binom{m}{n}$ (kombinacije)

ugoden je en sam

iskana verjetnost je $\frac{1}{\binom{m}{n}} = \frac{n!(m-n)!}{m!}$

c.) kroglic ne razlikujemo in dopuščamo poljubno kroglic v posodi: vseh izidov je $\binom{m+n-1}{m-1}$ (šibke kompozicije)

npvegrade

ugoden je en sam

iskana verjetnost je $\frac{1}{\binom{m+n-1}{m-1}}$

V mehaniki (fizika) so kroglice molekule, atomi ali drugi delci, posode so pa fazna stanja, v katerih so lahko delci.

V primeru a.) imamo Maxwell-Boltzmannovo statistiko (velja za molekule plina)

V primeru b.) imamo Fermi-Diracovo statistiko (velja za fermione), recimo elektroni

ker velja Diracovo izključitveno načelo.

V primeru c.) imamo Bose-Einsteinovo statistiko (velja za bozone). recimo fotoni

[2. aksiomatična definicija verjetnosti]

Kolmogorov (RU) okoli 1930. Imamo prostor vseh izidov (Ω), ki ga priredimo danemu problemu. Dogodki so nekatere, ne nujno vse, podmnožice $A \subseteq \Omega$.

Primer: met kocke: $\Omega = \{1..6\}$

dogodki so 2^Ω. recimo $\{6\}$ pomeni, da pade šestica.

recimo $\{2,4,6\}$ pomeni, da pade sodo pik.

RAČUNANJE Z DOGODKI:

- Vsota dogodkov ≈ unija dogodkov
  $A+B$ (verjetnostni račun) $A \cup B$ (teorija množic)
  pomen: zgodi se vsaj eden izmed dogodkov A in B
- Produkt ≈ presek dogodkov.
  $A \cdot B$ $A \cap B$
  pomen: zgodita se oba dogodka izmed A in B
- nasprotni dogodek ≈ komplement dogodka
  $\overline{A}$ A^c
  pomen: dogodek A se ne zgodi

NTSBBINGO

Pravila za računanje z dogodki:

$A \cup A = A$ $A \cap A = A$ idempotentnost

$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$ komutativnost

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ asociativnost

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ distributivnost

... de morganovi pravili