OMVFMF 2025-03-18

II

Rešite opt. nal.

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$$

p.p.
$$7x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geq 4$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 8$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq -6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Dvofazna simpleksna metoda:

1. Faza: prevedimo v std obliko

$$\max -x_1 - x_3$$

p.p.
$$-7x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 \leq -4 + x_0$$
$$-x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 \leq -8 + x_0$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_6 \leq 6 + x_0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min w = x_0$$

1. SLOVAR:

$$x_4 = -4 + x_0 + 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 \qquad x_0 \geq 4$$
$$x_5 = -8 + x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad x_0 \geq 8$$
$$x_6 = 6 + x_0 + x_1 - x_2 + x_3 \qquad x_0 \geq -6$$

$$w = -x_0$$

x_0 vstopi, x_5 izstopi,

2. SLOVAR

$$X_0 = X_5 + X_3 - 3X_2 - X_1 + 8 \qquad X_1 \le 8$$
$$X_4 = 4 + 6X_1 - 8X_2 + 3X_3 + X_5 \qquad X_1 \le \infty$$
$$X_6 = 14 - 4X_2 + 2X_3 + X_5$$
$$w = -8 + \underbrace{X_1 + 3X_2}_{\text{kandidata za vstopno}} - X_3 - X_5$$

X_1 vstopi, X_0 izstopi

3. SLOVAR

$$X_1 = 8 - 3X_2 + X_3 + X_5 - X_0$$
$$X_4 = 52 - 26X_2 + 9X_3 + 7X_5 - 6X_0$$
$$X_6 = 14 - 4X_2 + 2X_3 + X_5$$
$$w = -X_0$$

DRUGA FAZA :

tretji slovar 1. faze
$X_0 := 0$

1. SLOVAR

$$X_1 = 8 - 3X_2 + X_3 + X_5 \qquad X_2 \le \frac{8}{3}$$
$$X_4 = 52 - 26X_2 + 9X_3 + 7X_5 \qquad X_2 \le 2$$
$$X_6 = 14 - 4X_2 + 2X_3 + X_5 \qquad X_2 \le \frac{14}{4}$$
$$z = -8 + 3X_2 - 2X_3 - X_5$$

vstopi X_2, izstopi X_4

2. SLOVAR

$$X_2 = 2 + \frac{9}{26}X_3 - \frac{1}{26}X_4 + \frac{7}{26}X_5$$
$$X_1 = 2 - \frac{1}{26}X_3 + \frac{3}{26}X_4 + 5/26\, X_5$$
$$X_6 = 6 + \frac{8}{13}X_3 + \frac{2}{13}X_4 - \frac{1}{13}X_5$$

$$z = -2 - \frac{25}{26}x_3 - \boxed{\frac{3}{26}}x_4 - \boxed{\frac{5}{26}}x_5 + \boxed{0}\,x_6$$

optimalna vrednost

$$z^* = 2$$

$x_3 = x_4 = x_5 = 0$ $\quad x_1 = 2 \quad x_2 = 2 \quad x_6 = 6$

zapiši še dualen program tega programa

P':

$$\max \quad 4y_1 + 8y_2 - 6y_3$$

p.p.

$$7y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$$
$$-5y_1 + 3y_2 - y_3 \leq 0$$
$$-y_1 + y_2 - y_3 \leq 1$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

je dopusten

$z^* = 2$ $\quad y_1^* = \boxed{\frac{3}{26}} \quad y_2^* = \boxed{\frac{5}{26}} \quad y_3^* = \boxed{0}$

N

Let P LP v std obliki

P ima opt. rešitev.

z^* je opt vr. za P in y^* opt reš. za P'

Omejitve za P spremenimo za $\boxed{t}$ (vektor) in spremenjeni program označimo s P_t.

Let x dop. reš. za P_t. Pokaži, da velja

$$c^T x \le z^* + t^T y^*$$

P: max $c^T x$
p.p. $Ax \le b$
$x \ge 0$

P_t: max $c^T x$
p.p. $Ax \le b + t$
$x \ge 0$

P': min $b^T y$
p.p. $A^T y \ge c$
$y \ge 0$

P'_t: max $(b+t)^T y$
p.p. $A^T y \ge c$
$y \ge 0$

šibki izrek o dualnosti:
$x \in \Omega_P$ in $y \in \Omega_{P'}$
dopustne rešitve
$\Rightarrow \quad c^T x \le b^T y$

krepki izrek o dualnosti
let x^* opt. reš. za P.
tedaj ima P' opt. reš. če je
y^* opt za P', potem je
$c^T x^* = b^T y^*$

Opazimo: • P' in P'_t imata
isto množico dopustnih rešitev.

• y^* je opt. rešitev za P' $\Rightarrow$ je dopustna za P'_t

• po šibki velja: $x \in \Omega_{P_t}$ to velja

$$c^T x \le (b+t)^T y^* =$$
$$= b^T y^* + t^T y^*$$

N

Proizvajalec oreščkov ima zalogo:

— 150 kg arašidov
— 100 kg mandljev
— 50 kg indijskih oreščkov

dela zavitke po 1 kg:

mešanica	arašidi	mandlji	indijski	cena
student	0,8	0,2	0	9 €
party	0,5	0,3	0,2	11 €
deluxe	0,2	0,5	0,3	13 €

čim večji dobiček !!!!! 111

a.) zapiši LP

b.) z DD pokaži, da je opt. naroditi po 100 kg mešanice vsakega tipa

c.) ocena povečanja dobička, če podjetje dokupi 15 kg indijskih oreščkov.

a.) $\max \ 9x_1 + 11x_2 + 13x_3$ ... dobiček

p.p. $0.8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 \leq 150$

$0{,}2x_2 + 0{,}3x_2 + 0{,}5x_3 \leq 100$

$0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 \leq 50$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

b.) $(100,100,100)$ je dopustna

P' $\min \ 150y_1 + 100y_2 + 50y_3$

p.p. $0.8y_1 + 0.2y_2 \geq 9$

$0{,}5y_1 + 0{,}3y_2 + 0{,}2y_3 \geq 11$

$0{,}2y_1 + 0{,}5y_2 + 0{,}3y_3 \geq 13$

... $y_1 = \frac{23}{3}$ $y_2 = \frac{43}{3}$ $y_3 = \frac{43}{3}$

c.) $t = (0,0,15)^T$ $y^* = \left(\boxed{\frac{23}{3}}, \boxed{\frac{43}{3}}, \boxed{\frac{43}{3}}\right)$

$t^T y^* = 215$

delta zaslužka, če se cene nakupa 1kg indijskih oreškov < $\boxed{\frac{43}{3}}$

$\boxed{\ }, \boxed{\ }$ sta pozitivna koef., zato zaslužil več, če kupi še mandljev in arašidov.

N

Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Pokaži, da ima sistem $Ax = b$ nenegativno rešitev $\iff$ $A^T y \geq 0$, $b^T y < 0$ nima rešitve

...

Farkaševa lema ^^

N

Pokažite, da ima sistem enačb

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

nima nenegativne rešitve.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T y \geq 0: \left| \begin{array}{l} y_1 - y_2 \geq 0 \\ -y_1 - y_2 \geq 0 \\ 2y_1 + y_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$b^T y < 0 \;\Big|\; y_1 + 2y_2 < 0$$

uganemo rešitev $y_1 = 1$ $y_2 = -1$

$\Rightarrow$ ima rešitev $\Rightarrow$ po Farkasu sistem iz naloge nima nenegativne rešitve

N

---

igra ima sedlo $\iff \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$

...