OMP FMF 2025-05-09

zamudil prvi dve uri in 15 min tretje – prespal budilko ni

<u>Izrek (Farkaševa lema):</u> alg. razl., 2. verzija

let $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Tedaj $\exists x \geq 0 : Ax = b \iff \forall y \in \mathbb{R}^n (A^T y \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0)$

skica dokaza:

$$\begin{array}{lll} \max & 0^T y \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \text{dop./opt.} \overset{KID}{\iff} \quad \begin{array}{lll} \min & b^T y \\ \text{p.p.} & A^T y \geq 0 & \text{opt.} \\ & y \geq 0 \end{array}$$

<u>Primer:</u> Ali obstajata x_1, x_2, da velja

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 - x_2 &\leq -3 \quad /\cdot 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \quad /\cdot 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

da dokažemo, da ne obstajajo, dobimo „certifikat" s farkaševo lemo.

(+)

pomnožimo z NENEGATIVNIMI koeficienti in seštejemo

$x_1 \leq -1$

<u>Opomba:</u> Farkaš: $b \notin S(a_1, \dots, a_k) \Rightarrow b \notin S^{**}(a_1, \dots, a_k)$

konveksni stožec

ZOB če b ni v konveksnem stožcu, napetem na $a_1, \dots, a_k$, potem obstaja hiperravnina, ki separira b in ta konveksni stožec.

<u>Opomba:</u> KID lahko dokažemo s pomočjo farkaševe leme.

[Konveksne funkcije]

Def.: Let $K^{konv} \subseteq \mathbb{R}^n$. $f: K \to \mathbb{R}$ je konveksna, če $\forall x,y \in K, \lambda \in [0,1]: f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq$
$$\leq (1-\lambda)\cdot f(x) + \lambda \cdot f(y)$$

Konveksne množice v $\mathbb{R}$ so natanko intervali.

Primer: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$((1-\lambda)x + \lambda y)^2 \leq 1-\lambda x^2 + \lambda y^2$$

$$(1-\lambda)^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + \lambda^2 y^2 - 1-\lambda x^2 - \lambda y^2 \leq 0$$

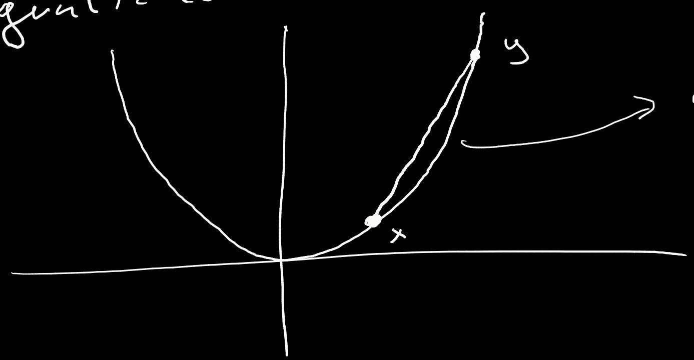
$$\|$$

$$-\lambda(1-\lambda)x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy - \lambda(1-\lambda)y^2$$

$$\|$$

$$-\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \leq 0 \quad \checkmark$$

grafično



graf je pod zveznico med dvema točkama na grafu.

Def.: f-ja je konveksna, če je graf med dvema točkama na grafu pod zveznico.

Def.: Let $K^{konv} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: K \to \mathbb{R}$ je konkavna, če
$$\forall x,y \in K, \lambda \in [0,1]: f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y$$

Def.: —||— strogo konveksna —||— $(0,1)$ —||— $>$ —||—

Def.: —||— strogo konkavna —||— $(0,1)$ —||— $<$ —||—