OMPFMF 2025-04-25

Iščemo najcenejše popolno prirejanje z madžarsko metodo. Glej prejšnje zapiske (zvezek).

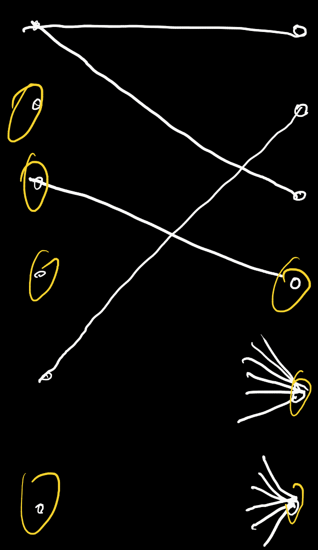
$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (dovolimo ∞)

minimalno popolno prirejanje: $\min\limits_{\pi \in S_n} \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i\pi_i}$

ničelni graf: $V(H) = \{v_1, \dots, v_n, s_1, \dots, s_n\}$

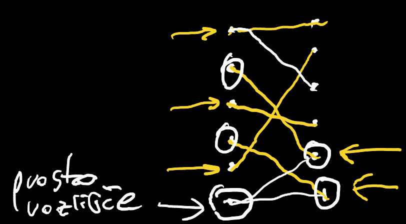
$v_i \sim s_j \iff c_{ij} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



T so 0

↓ najdemo povečujočo pot in prirejanje

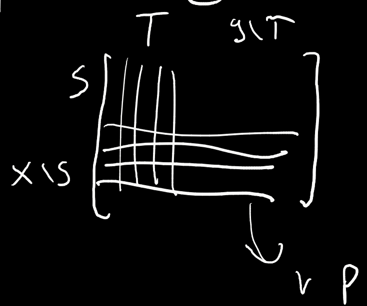


v Y obkroženi so T

$P = T \cup (X \setminus S)$ rumene puščice

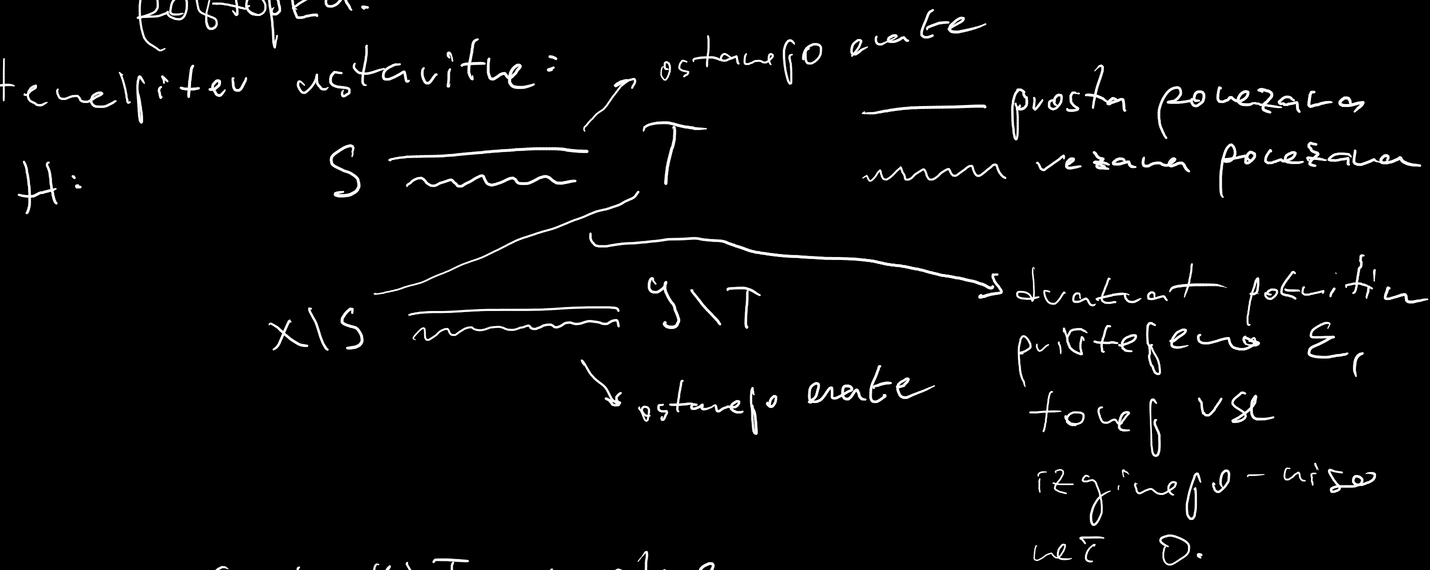
vrsticam v X\S prištejemo ε
stolpcem v Y\T odštejemo ε.

od nepokritih elementov odštejemo ε.
enkrat pokriti elementi ostanejo enaki.
dvakrat pokritim elementom prištejemo ε



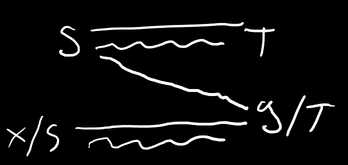
↳ prištevanja in odštevanja vrsticam problema ne spremenijo, spremenijo pa ničelni grafi kar zagotovi ustavitev postopka.

utemeljitev ustavitve:



med S in Y\T nastane nova povezava xy --
med nepokritimi dobimo vsaj eno ničlo, ko odštejemo minimum.

novo stanje:



case y prosto vozlišče:
našli smo povečujočo pot -- M se poveča

case y vezano vozlišče:
poveča se S

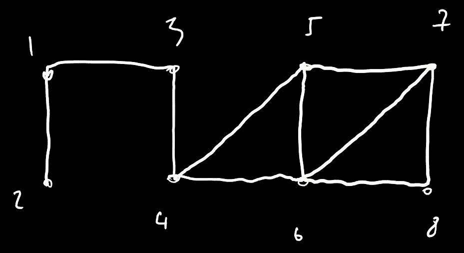
časovna zahtevnost: S se lahko poveča

največ n+1-krat, preden se poveča n.
postopek se torej ustavi po največ $n(n+1)$ korakih madžarske metode z utežmi.
zahtevnost koraka je $O(n^2)$, skupna zahtevnost iskanja prirejanja je $O(n^4)$.

OPOMBA: MMU SE da implementirati z zahtevnostjo $O(n^3)$.
OPOMBA: najdražje pop. prir.: rešimo problem najm. pop. prir. na $-C$.

[Najkrajše poti]

- BFS dve tabeli: d-razdalje, π-predhodnik na najkr. poti.

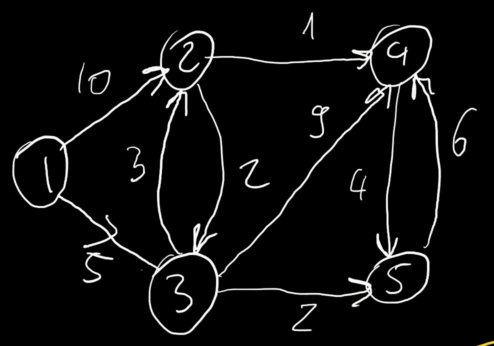


d

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	/	/	/	/	/	/	/	/
1	∞	0	1	∞	∞	∞	∞	3	/	/	3	/	/	/	/
1	2	0	1	2	2	∞	∞	3	1	/	3	4	4	/	/
1	2	0	1	2	2	3	3	3	1	/	3	4	4	5	6

v vsakem koraku dodamo v d in π za sosede nepregledanih sosednjih vozlišč.

• Dijkstra: uteženi grafi z nenegativnimi utežmi.



$d(1,3)+w(3,2)<d(1,2)$

Izberemo točko $r=1$.

d: 1	2	3	4	5	π: 1	2	3	4	5
0	∞	∞	∞	∞	/	/	/	/	/
0	10	5	∞	∞	/	1	1	/	/
0	8	5	14	7	/	3	1	3	3
0	8	5	13	7	/	3	1	5	3
0	8	5	9	7	/	3	1	2	3

Na vsakem koraku podčrtamo vozlišče i, ki ima med doslej nepodčrtanimi vozlišči najmanjši d. Če je $d(r,i)+w(i,j) < d(r,i)$, popravi

$d(r,j) := d(r,i)+w(i,j)$, $\pi(j) := i$

Število vozlišč, vsakič pregledamo vse sosede → $O(|V|^2)$.

Da se implementirati hitreje:

$O(|E| \cdot \log|V|)$ ali $O(|E|+|V|\log|V|)$

Najkrajše poti v acikličnih grafih: (DAG)

let G utežen usmerjen graf brez usmerjenega cikla. Uteži so lahko tudi negativne.

Topološka ureditev je bijekcija $\varphi: V(G) \to [n] \ni$:

$\forall ij \in E(G): \varphi(i) < \varphi(j)$.

Da najdemo topološko ureditev, vzamemo vozlišče z vhodno stopnjo 0 kot prvo vozlišče.

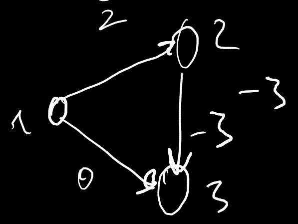
odstranimo njegove povezave (zmanjšamo poprej izrač. vhodne stopnje sosedom in nadaljujemo).

Če graf ni acikličen, v nekem trenutku ne bo vozlišča z vhodno stopnjo 0.

potrebujemo $O(|E(G)|+|V(G)|)$ operacij za topol. ured.

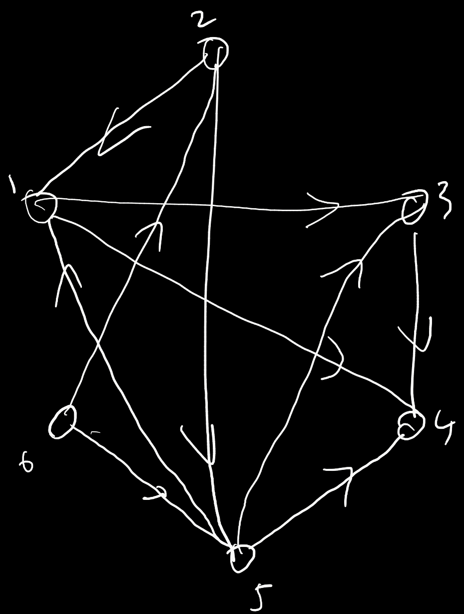
sedaj iščemo najkrajše poti na topol. ured. grafu.

intermezzo: zakaj dijkstra ne dela z negativnimi utežmi?



1	2	3
0	∞	∞
0	2	0

toda napačna pot.



v vrstnem redu topol. ured.

d

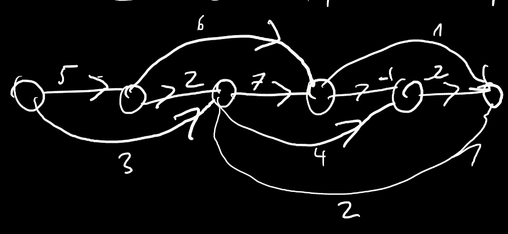
1	2	3	4	5	6
∞	∞	∞	∞	∞	0
∞	5	∞	∞	3	0
11	5	∞	∞	3	0
10	5	7	5	3	0
10	5	7	5	3	0
10	5	7	5	3	0

π

1	2	3	4	5	6
/	/	/	/	/	/
/	6	/	/	6	/
2	6	/	/	6	/
5	6	5	5	6	/
5	6	5	5	6	/
5	6	5	5	6	/

podčrtamo najprej $\varphi^{-1}(1)$, nato $\varphi^{-1}(2)$,
$\varphi^{-1}(1) = r$

6 2 5 1 3 4



vsem sosedom podčrtanega vozlišča i $d(r,j)$ spremenimo v $d(r,i)+w(i,j)$, če je to manjše od $d(r,j)$

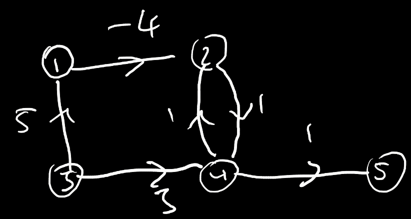
$O(|V|+|E|)$

- Bellman-Fordov algoritem, uteži lahko negativne
  iščemo najkrajše poti od točke a.

  algoritem vrne napako, če je v grafu kak negativen cikel, do katerega lahko pridemo iz točke.

  sicer pa je največja možna dolžina najkrajše poti (število vozlišč)−1.

  $(|V(G)|-1)$-krat ponovimo: gremo po vseh povezavah in znižamo d:



d

1	2	3	4	5
∞	∞	0	∞	∞
5	∞	0	3	∞
5	1	0	3	4
5	1	0	2	4
5	1	0	2	3

π

1	2	3	4	5
/	/	/	/	/
3	/	/	3	/
3	1	/	3	4
3	1	/	2	4
3	/	/	2	4

še enkrat preverimo vse povezave. če se je $|V|$-tokratih d spet znižal, vrnemo napako -- neg. cikel

$O(|V|\cdot|E|)$

- Floyd-Warshall - let G utežen DAG. uteži so lahko <0. najde razdalje med vsemi pari točk oz. vrne napako, če obstaja kak neg. cikel.

$W = [w_{ij}]_{i,j=\{1..n\}}$ → k-ti korak - uporablja k-to vozlišče.

$d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$ (0) → korak

$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}$

$O(n^3)$

[KONVEKSNA OPTIMIZACIJA]

minimizacija (opt je VEDNO min) konveksne fje po konveksni množici.

Def.: Množica A je konveksna, če je cela daljica med $x,y \in A$ tudi v A. (coloquially)

uradneje:

Def.: Množica A je konveksna $\Leftrightarrow \forall x,y \in A: \forall \lambda \in [0,1]: (1-\lambda)x + \lambda y \in A$.

vse točke na premici skozi x in y so

$$x + \lambda(y-x) = \underbrace{(1-\lambda)x + \lambda y}$$

za $\lambda \in \mathbb{R}$ — afina kombinacija

je linearna komb., kjer se skalarji seštejejo v 1.

vse točke na daljici xy so $\underbrace{(1-\lambda)x + \lambda y \quad \text{za} \quad \lambda \in [0,1]}$.

konveksna kombinacija

je linearna komb., kjer se skalarji seštejejo v 1 in so ≥ 0.

konv. ni konv.

"v konveksnih množicah se ni smiselno igrati skrivalnic"
— Konvalinkin pavt, 2025

Trditev: Presek konveksnih množic je konveksen. (Tudi neskončen presek).

Dokaz: let $A_i, i \in I$ konveksne.

$$A = \bigcap_{i \in I} A_i \text{ je konveksna}$$

let $x,y \in A$, $\lambda \in [0,1]$, $i \in I$ poljubni

$$\underbrace{(1-\lambda)\underbrace{x}_{\in A_i} + \lambda \underbrace{y}_{\in A_i}}_{} \in \underbrace{A_i}_{A_i \text{ konv.}} \implies$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in A$$

Def.: konveksna ogrinjača.

$$C(A) := \bigcap_{\substack{K \subseteq \mathbb{R}^n \\ K \text{ konv} \\ A \subseteq K}} K$$

neprazen presek, ker je vsaj $\mathbb{R}^n$ konveksna.

očitno je $C(A)$ konveksna, ker je presek konveksnih.

Def.: $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ je konveksna kombinacija vektorjev $x_1, \dots, x_k \iff \sum_i \lambda_i = 1$ in $\forall i : \lambda_i \geq 0$.

Trditev: $C(A) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0,\ \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1,\ x_1, \dots, x_k \in A$

na realnih vektorskih prostorih.