OMPFMF 2025-04-11

meta: 2025-04-18
so predavanja izpeljana
8.30 — 10.10 v 3-04
vaje 1PM tudi prestavljene na
10.25 — xxxx

[max flow]

$$\max \sum_{zač(e)=s} x_e$$

p.p. Kirchhoff, $0 \le x_e \le u_e$

[minim. prerez]

C, $C \subseteq V$, $s \in C$, $t \notin C$

$$\sum_{\substack{i\in C\\ j\notin C}} u_{ij} \in [0, \infty]$$

poprej smo pokazali $\sum_{\substack{i\in C\\ j\notin C}} x_{ij} - \sum_{\substack{i\in C\\ j\notin C}} = \sum_{zač(e)=s} x_e$

$\Rightarrow$ vrednost poljubnega pretoka $\le$ kapaciteta poljubnega prereza.

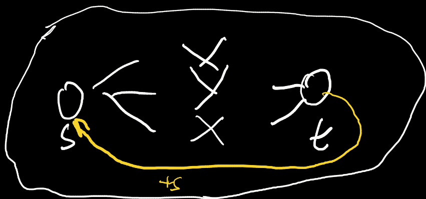
$\Rightarrow$ če najdemo prerez in pretok iste vrednosti, sta oba optimalna.

Izrek: Velja natanko ena od možnosti:

- obstajajo pretoki s poljubno velikimi vrednostmi
  ↳ v takem primeru imajo vsi prerezi kapaciteto ∞.
- obstaja max flow. $\Rightarrow \exists$ prerez, katerega kapaciteta je enaka max flowu.

to pa več ni očitno

Dokaz: Prevedemo na problem razvoza z omejitvami dodamo povezavo ts. na prvotne damo ceno 0, na ts pa −1. u_{ts} (kapaciteta) $= \infty$.



problem je očitno dopusten − $x_e = 0$ je tok, je lahko
bodisi neomejen
bodisi ima opt rešitev

tedaj so vsi prerezi neomejeni in vse kapacitete prerezov ∞

tedaj ima opt. drevesno rešitev x.

let y_v razvozne cene.

oglejmo si ts: $y_t + \underset{=-1}{c_{ts}}$ compare y_s.

ts zagotovo ni nasičena ($u_{ts} = \infty$) $\Longrightarrow$ sledi $\geq$

$$y_t \geq y_s + 1$$

$C = \{ v \in V : y_v \leq y_s \}$ vsebuje s, a ne t, zato je C res prerez.

zakaj je njegova kapaciteta res enaka max flow?

$ij \in E$ ie $i \in C,\ j \notin C$:

$$\begin{array}{ccccc} y_i & + & c_{ij} & \text{compare} & y_j \\ \wedge\!\mid & & \| & & \vee \\ y_s & & 0 & \Rightarrow < \Leftarrow & y_s \end{array}$$

E ne vsebuje ts

torej je taka povezava izven drevesa $\Longrightarrow$ ij je prazna ali nasičena
$\Longrightarrow$ ij je nasičena ($x_{ij} = u_{ij} = \infty$)

ie $i \notin C,\ j \in C$

$$\begin{array}{ccccc} y_i & + & c_{ij} & \text{compare} & y_j \\ \vee & & \| & > & \mid\!\wedge \\ y_s & & 0 & & y_s \end{array}$$

torej je izven drevesa $\Longrightarrow$ ij prazna/nasičena
$\Longrightarrow$ ij prazna ($x_{ij} = 0$).

$$\underbrace{\sum_{\substack{i\in C\\ j\notin C}} x_{ij}}_{\text{vrednost pretoka}} - \cancel{\sum_{\substack{i\notin C\\ j\in C}} x_{ij}}^{\,0} = \underbrace{\sum_{\substack{i\in C\\ j\notin C}} u_{ij}}_{\text{kapaciteta prereza } C}$$

---

let x pretok

algoritem za hitro reševanje MF

rečemo, da je $v_0 v_1 \dots v_t$ POVEČUJOČA POT, če velja

- $v_0 = s$, $v_t = t$
- $\forall i \in \{1..(n-1)\}$: $\left(\underbrace{v_i v_{i+1} \in E}_{\text{prema}} \wedge \overbrace{x_{v_i v_{i+1}} < u_{v_i v_{i+1}}}^{\text{ni nasičena}}\right) \vee \left(\underbrace{v_{i+1} v_i \in E}_{\text{obratna}} \wedge \underbrace{x_{v_{i+1} v_i} > 0}_{\text{ni prazna}}\right)$

$$t := \min\{u_{v_i v_{i+1}} - x_{v_i v_{i+1}} : v_i v_{i+1} \text{ prema}\} \cup \{x_{v_{i+1} v_i} : v_i v_{i+1} \text{ obratna}\}$$

velja $t > 0$ — degeneriranih korakov nimamo.

na premih pretok povečamo za t,
na obratnih ga zmanjšamo za t.

v vseh situacijah se Kirchhoffov zakon ohranja.

Kako pa najdemo povečujočo pot?

$C := \{s\}$. dopolnjujemo s sosedi, ki so ustrezni kandidati za pov. pot. (povezave do teh sosedov so nenasičene za preme in neprazne za obratne).

nadaljujemo z dopolnjevanjem, dokler $t \in C$. tedaj smo našli povečujočo pot.

tedaj povečamo pretok in ponovimo postopek.

lahko pa se zgodi, da $t \notin C$ in ne moremo več ustaviti novih ustreznih vozlišč.

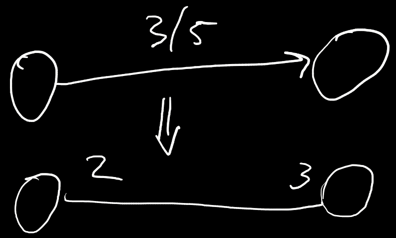
tedaj je C prerez. za $ij \in E$: $i \in C, j \notin C$ je nasičena, sicer bi j lahko dodali v C.

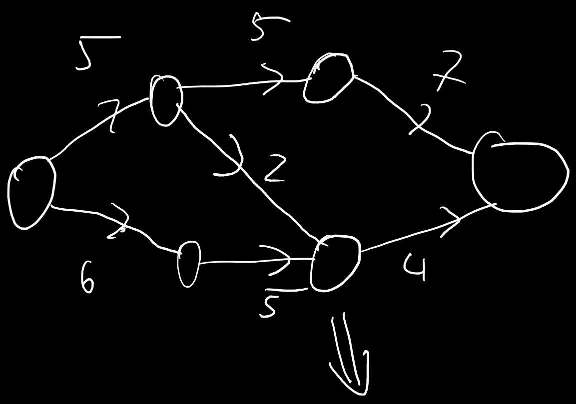
za $ij \in E$: $i \notin C, j \notin C$ je prazna, sicer bi i lahko dodali v C.

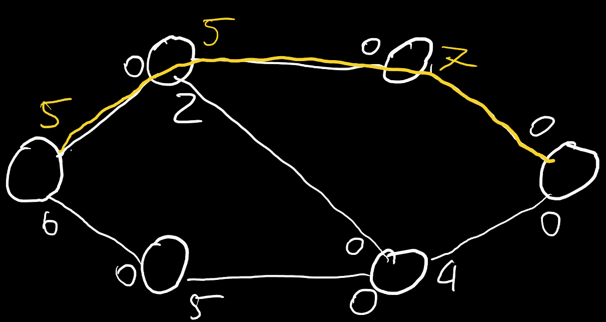
V tem primeru
$$\sum_{\substack{i \in C \\ j \notin C}} \cancel{x_{ij}}^{\,u_{ij}} - \sum_{\substack{i \notin C \\ j \in C}} \cancel{x_{ij}}^{\,0} = \sum_{\substack{i \in C \\ j \notin C}} u_{ij}$$
$$\| $$
vrednost pretoka.

to je Ford-Fulkersonov algoritem.

Običajno rešujemo problem na pridruženem grafu



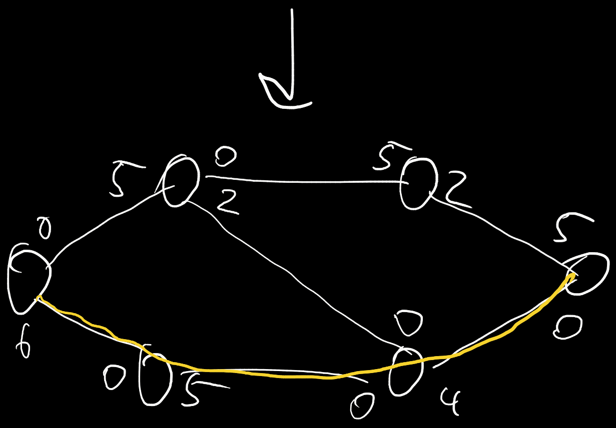




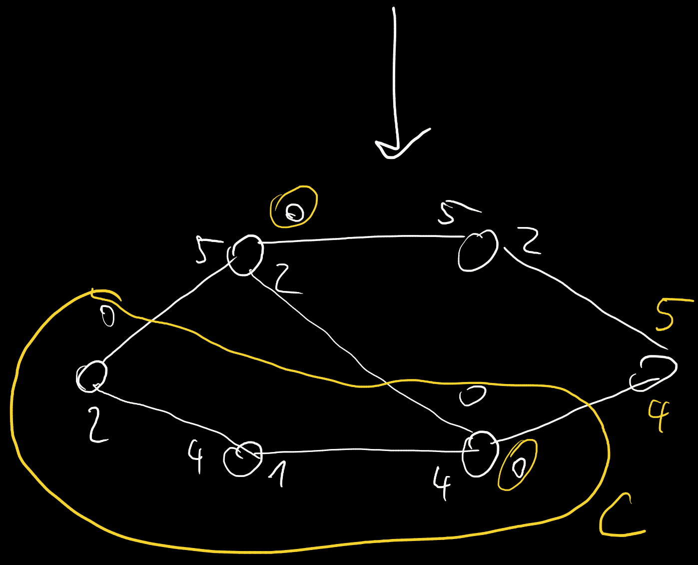
$t = \min$ prvih števil
pot je veljavna, če so prve števile na njej > 0

$t = 5$

I korak



$t=4$



konec

pretok $5+4=9$

kapacit. min. prereza (pogledano na orig. graf): 9

ali se FF alg vedno konča?

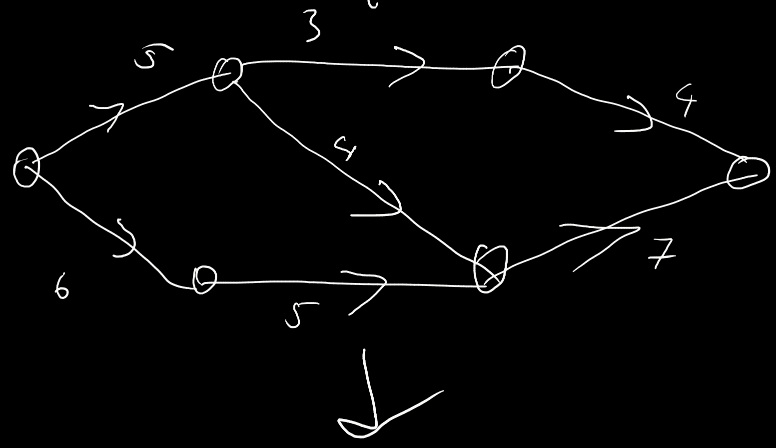
če imamo iracionalne kapacitete, se ne konča nujno.

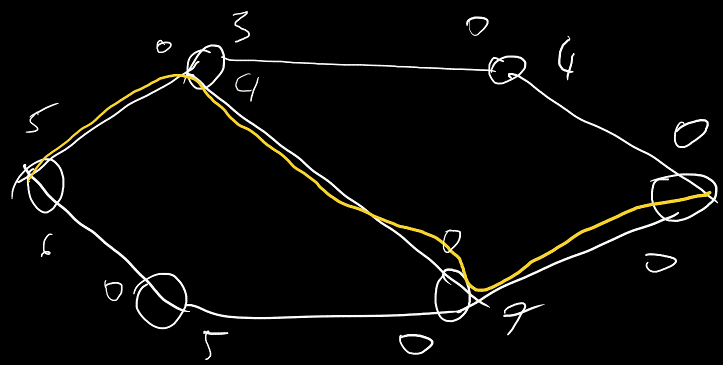
znano implementacijo FF alg sta naredila edmunds in karp, kjer sta vedno izbrala najkrajšo povečujočo pot. izkaže se, da taka impl vedno preneha z izvajanjem.

✓ v enem koraku lahko pregledno opisano

tudi na več povečujočih poteh, če so le disjunktne po povezavah.

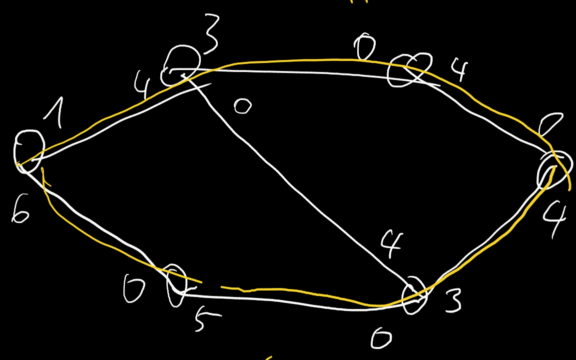
Ali bi FF alg. delovalo, če bi uporabili le poveč. poti s premimi povezavami? ne. primer:



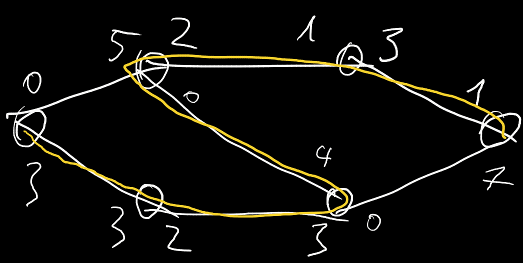


$t = 4$

$t = 1$

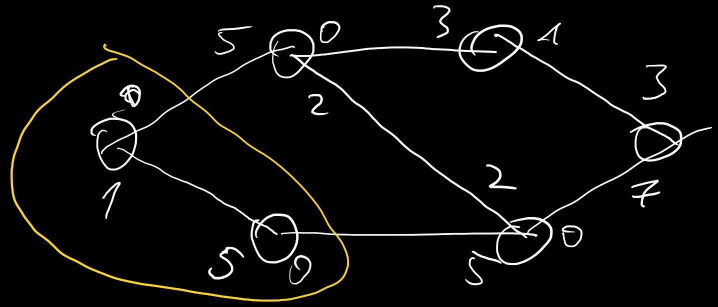


$t = 3$



$t = 2.$

edina preostala pov. pot, ki nima le premih povezav.



[PRIREJANJA IN POKRITJA]

Def: let G graf. $G=(V,E)$

$M \subseteq E$ je prirejanje $\iff$ $\forall e,f \in M: e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset$

zDB nobeno vozlišče iz V ni krajišče več povezav iz M.

Prirejanje je popolno, če $\forall v \in V\ \exists e \in M: v \in e$

zDB vsako vozlišče iz V je krajišče natanko ene povezave iz M.

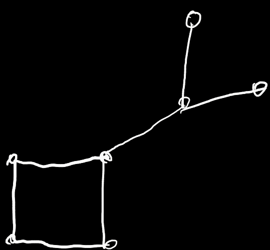
Pokritje je $P \subseteq V$, če $\forall e \in E$ velja $e \cap P \neq \emptyset$ zDB vsaka povezava ima vsaj eno krajišče v P.

ustrezni sta: $M = \emptyset$ prirejanje
$P = V$ pokritje

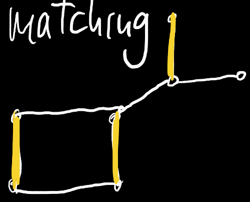
$\mu(G)$ je velikost največjega prirejanja

$\tau(G)$ je velikost najmanjšega pokritja.

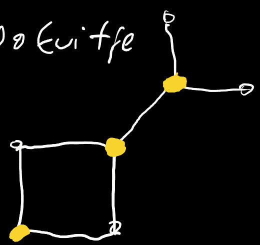
Primer:



matching



pokritje

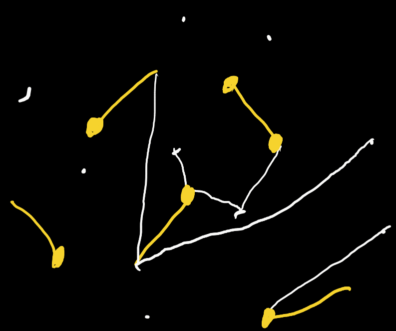


Trditev: 1) M prirejanje, P pokritje $\Rightarrow$ $|M| \leq |P|$

2) $\mu(G) \leq \tilde{\rho}(G)$

3) M prirejanje, P pokritje, $|M| = |P| \Rightarrow$
M najv. prir. in P najm. pot., $\mu(G) = \tilde{\rho}(G) = |M| = |P|$.

Dokaz:



na vsaki povezavi iz M mora biti vsaj eno vozlišče iz P.

skonstruiramo inj. preslikavo:

$f: M \to P$

$e \mapsto$ krajišče $e \cap P$

dobro definirana, ker P pokritje.
ker M matching, injektivno.
ker injektivna, $|M| \leq |P|$.

$\square$

let M prirejanje v G.

Def: e je vezana, če $e \in M$
e je prosta, če $e \notin M$

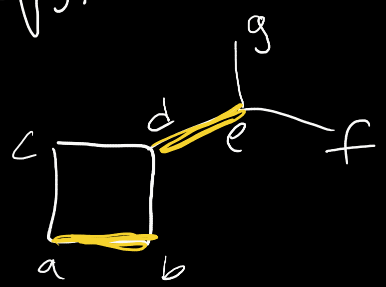
v je vezano vozlišče, če $\exists (!) e \in M \ni: v \in e$

↳ sledi iz M prirejanje

v je prosto, če $\nexists e \in M \ni: v \in e$.

<u>Def:</u> pot je izmenična/alternirajoča, če se na njej izmenjujejo proste in vezane povezave.

<u>Def:</u> alternirajoča pot je povečujoča, če se začne in konča s prostim vozliščem. (ni dovolj, da se začne in konča s prosto povezavo, da bo povečujoča, je pa to potreben pogoj).



abdeg je alternirajoča

bdeg je alternirajoča

cabdeg je povečujoča. nista pa povečujoči, ker se začneta v vezanih vozliščih

---

<u>Def:</u> A, B množici. $A \oplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

simetrična razlika množic.

<u>Trditev:</u> Če je M prirejanje in P povečujoča pot, je $M \oplus P$ tudi prirejanje in $|M \oplus P| = |M| + 1$.

<u>Izrek (Berge):</u> M je največje prirejanje $\Leftrightarrow \nexists$ povečujoča pot.

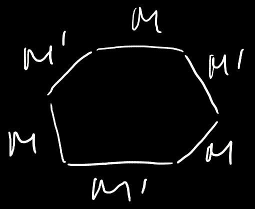
Dokaz: ($\Longrightarrow$) že vemo.

($\Longleftarrow$) let M ni največje prirejanje.

Tedaj $\exists$ drugo prirejanje M', ki je večje.

let H podgraf G z $E(H) = M \oplus M'$

$\deg_H v \leq 2$, ker je vsaka povezava je iz natanko enega izmed M, M', sledi, da sta prirejanji



Komponente grafa H so
- cikli sode dolžine
- poti (sode in lihe)
- izolirana vozlišča / poti dolžine 1.

vsaj ena pot v H obstaja in se začne in konča z M', ker $|M'| > |M|$.

$M' \quad M \quad M' \quad M \quad M' \ldots M \quad M'$

Trdimo, da je to povečujoča pot za M.

Izmenjujejo se sicer proste in vezane povezave, trdimo še, da se začne in konča s prostim vozliščem (glede na M).

PIIRAA Če to ne bi bilo res, bi $\exists e \in M$, ki ima začetno vozlišče poti za krajišče. Ker $e \notin E(H)$, je $e \in M'$;

$\rightarrow\!\times$.

$\square$

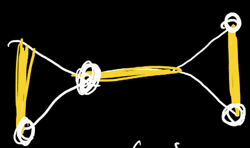
Torej: začnemo s praznim prirejanjem in iščemo povečujoče poti. Ko nobena taka ne obstaja več, smo našli največje prirejanje.

Za splošne grafe $\exists$ Edmondsov algoritem / Blossom (učinkovit -- P).

Za dvodelne grafe: madžarska metoda

pokaže $\mu(G) = \tau(G)$ (König Egerváry)

Primer grafa, ko $\mu(G) \neq \tau(G)$.:



$\mu(G) = 3$

$\tau(G) = 4$