OMPFMF 2025-03-21

razvoz:

b_v zahteva $\sum_{v \in V} b_v = 0$

c_e cena

x_e prevoz $\sum_{\text{konec } e = v} x_e - \sum_{\text{začetek } e = v} x_e = b_v$

$\min c^T x$

p.p. $Ax = b$ Kirchhoffov zakon · incidenčna matrika.

$x \geq 0$

dual:

$\max b^T y$

p.p. $A^T y \leq c$

y poljuben

y_i ... razvozne cene

za $e = ij$ $y_j - y_i \leq c_{ij}$

x, y dop $\Rightarrow$

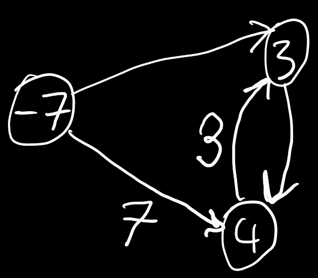
x, y opt. $\Leftrightarrow \forall ij \in E: x_{ij} = 0 \vee y_j - y_i = c_{ij}$

zelo težka definicija za spodnačivat na ustnem izpitu ×0

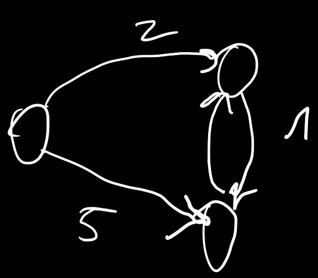
Def.: x je drevesna dopustna rešitev (DDR) $\Leftrightarrow$

- je dopustna $\wedge$
- $\exists$ vpeto drevo $T \ni: \forall e \notin T: x = 0$

recimo



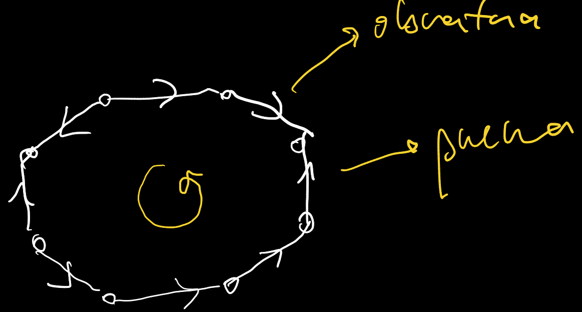
je DDR



ni DDR

TRDITEV: Če obstaja dopustna rešitev, obstaja tudi: bazična dopustna rešitev. Predpostavimo, da je G povezan, to ignoriramo smeri povezav.

Dokaz: Recimo, da v G ∃ nesmerjen (ignoriramo smeri) cikel, na katerem so vse vrednosti $x_e > 0$. Izberemo eno smer. Vse povezave v to smer so prave, v drugo smer pa obratne. Na pravih povezavah x povečamo za t, na obratnih zmanjšamo za t.



Kirchhoffov zakon je vedno velja:

$$\xrightarrow{+t} \circ \xrightarrow{+t} \quad \checkmark$$

$$\xrightarrow{+t} \circ \xleftarrow{-t} \quad \checkmark$$

$$\xleftarrow{-t} \circ \xrightarrow{+t} \quad \checkmark$$

$$\xleftarrow{-t} \circ \xleftarrow{-t} \quad \checkmark$$

Za t vzamemo $\min_{\text{obratne } e} x_e =: t$. Tako ohranimo nenegativnost in zagotovimo ničelni razvoz na povezavi, na kateri je min.

ČE NI OBRATNE POVEZAVE, OBRNEMO IZBRANO smer.

Nadaljujemo, dokler obstajajo cikli. Na koncu dobimo $x_e > 0$ na nekem gozdu. Za T vzamemo ta gozd in dopolnimo povezave, da gozd povežemo.

Opomba: Kako se spremeni cena razvoza pri našem postopku? za $t \cdot \left(\sum_{e \text{ prema}} c_e - \sum_{e \text{ obratna}} c_e\right)$.

Ali: cena pade ali naraste je odvisno od predznaka.

[Simpleksna metoda na omrežjih]

začnemo z x DDR.

poiščemo ustrezne razvozne cene (dual) na DDR, začenši z $y_1 = 0$. preostale izračunamo z $y_i + c_{ij} = y_j$ za $ij \in T$.

ker ni ciklov, je enolično rešljivo.

Če velja $y_i + c_{ij} \geq y_j$ za $ij \in E \setminus T$, je y dopustna za dual. Po DD sta x in y opt.

V nasprotnem primeru $\exists\, ij \in E \setminus T \ni: y_i + c_{ij} < y_j$ $(c_{ij} < y_j - y_i)$.

Tedaj dodamo ij v T in dobimo natanko en cikel, ki ga usmerimo v smeri ij.

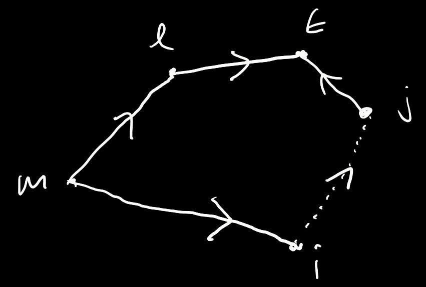
Zopet dobimo preme in obratne povezave.

$t := \min_{e \text{ obratne}} x_e$. na premih povečamo za t, na obratnih zmanjšamo za t. Gotovo na eni od obratnih postane 0, odstranimo obr. povezavo, na kateri je dosežen min, iz drevesa T.

ij se imenuje VSTOPNA povezava, odstranjena pa je IZSTOPNA.

povezave v drevesu, ko tako kot bazne spremenljivke.

če ni obratne povezave, je primer neomejen.



$y_i + c_{ij} < y_j$

$y_j + c_{jk} = y_k$

$y_l + c_{lk} = y_k$

$y_m + c_{ml} = y_l$

$y_m + c_{mi} = y_i$

$y_i = c_{mi} + y_m = c_{mi} - c_{ml} + y_l =$

$= c_{mi} - c_{ml} - c_{lk} + y_k = c_{mi} - c_{ml} - c_{lk} + c_{jk} + \cancel{y_j} < \cancel{y_j} - c_{ij}$

$$\underbrace{c_{ij}}_{\text{preme}} + \underline{c_{jk}} - \underbrace{c_{lk}}_{\text{obratne}} - \underline{c_{ml}} + \underline{c_{mi}} < 0$$

v splošnem: $\sum_{e \text{ prema}} c_e - \sum_{e \text{ obratna}} c_e < 0$. cena se

spremeni za $\underset{\geq 0}{t} \cdot \underbrace{\left(\sum_{e \text{ prema}} c_e - \sum_{e \text{ obratna}} c_e \right)}_{< 0} \leq 0$.

Gotovo se zmanjša.

če najdemo dve vozlišči, kjer je

$y_i + c_{ij} < y_j$

<u>Opomba</u>: če velja $\forall ij \in E \setminus T: y_i + c_{ij} \geq y_j$, potem je $(x_e)_e$ optimalna. že vemo iz DO. Dokažimo

Še enkrat. Naj bo $\bar{x}_e$ še ena rešitev:

$$(y_i + c_{ij} - y_j)x_{ij} \qquad\qquad (y_i + c_{ij} - y_j)\bar{x}_{ij}$$

$0 = 0$ na povezavi v drevesu

izven: $\quad 0 \quad\quad \leq \quad\quad \overset{\vee|}{0} \quad\quad \overset{\vee|}{0}$

torej
$$\sum_{ij\in E} c_{ij}x_{ij} + \sum_{ij\in E}(y_i - y_j)x_{ij} = c^Tx - x^T(A^Ty) =$$

$$= c^Tx - (Ax)^Ty = c^Tx - b^Ty \leq c^T\bar{x} - (A\bar{x})^Ty =$$

$$= c^T\bar{x} - b^Ty$$

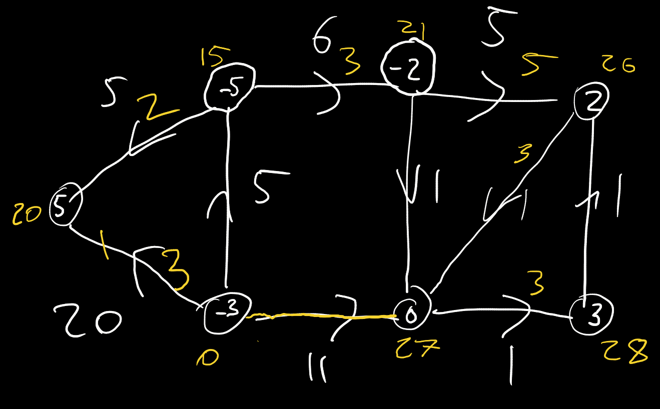
$$\Rightarrow \quad c^Tx \leq c^T\bar{x}$$

Opomba: let x DOR. $\quad (y_i + c_{ij} - y_j)x_{ij} = 0 \;\Big/ \sum_{ij\in E}$

$$c^Tx - b^Ty = 0$$

$c^Tx = b^Ty$ je res za vsako DOR in pripadajoče razvozne cene.

Primer:



y in razvozne cene: začetna dopustna rešitev

· je DOR ✓

sedaj izračunamo y.

najdimo tako izven drevesa, da

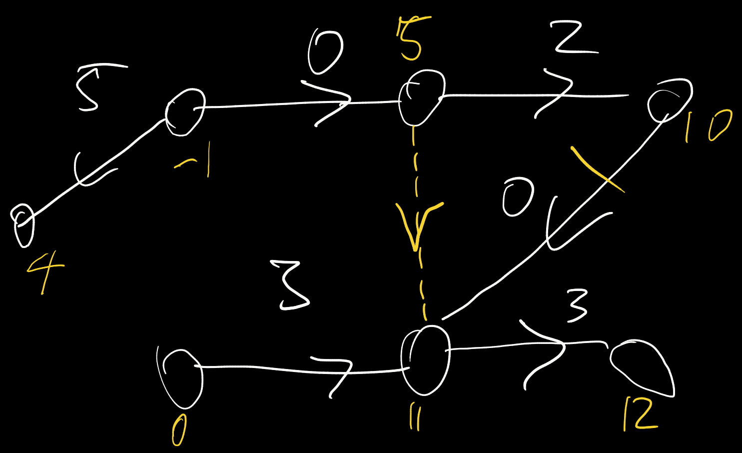
$y_i + c_{ij} \geq y_j$ ne velja.

$0 + 11 < 27$

to je ______ vstopna.

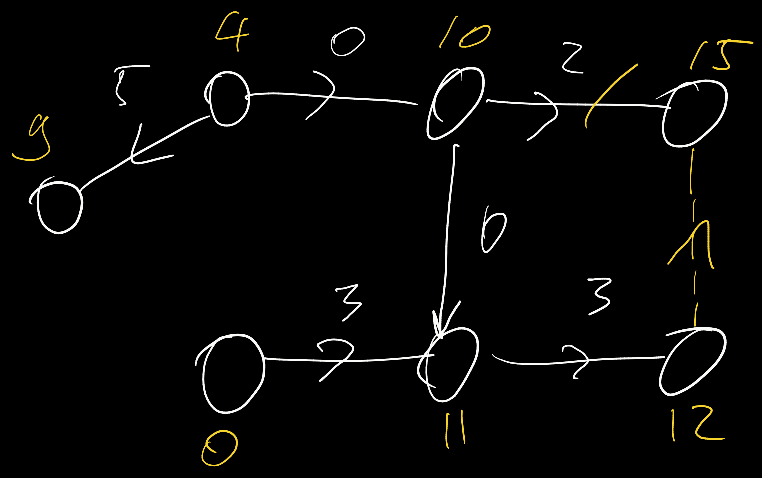
$t = 3$, izstopna je ✗ .

novi razvozi

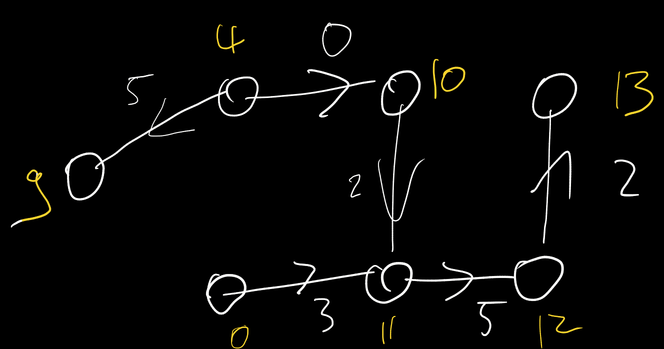


$5 + 1 < 11$; $t = 0$

degeneriran korak



$12 + 1 < 15$ $\quad t = 2$



sedaj

$0 + 20 \geq 9$ $\quad 10 + 5 \geq 13$

$0 + 5 \geq 4$

$13 + 1 \geq 11$

✓ konec

$3\cdot 11+5\cdot 1+2\cdot 1+2\cdot 1+0\cdot 6+5\cdot 5=67=$

$$b\cdot y \left\{ \begin{array}{l} = -3\cdot 0+0\cdot 11+3\cdot 12+9\cdot 5+4\cdot(-5)+10\cdot(-2)+ \\ \quad +13\cdot 2 \end{array} \right.$$

<u>Opomba:</u> vsako drevo enolično določa ddr. izberemo list. Če je na edini povezavi iz lista enolično določen. list in povezavo odstranimo, nadaljujemo.

Tako je dopustnih rešitev končno. Edini način, da se simpleksna metoda ne ustavi, je ciklanje degeneriranih točk. tega se (ne bomo dokazali) rešimo s Cunninghamovim pravilom:

- let r izbrani točk.
- med kandidati za izstop izberemo tisto, ki je prva na poti od r do vstopne povezave.

Do začetne ddr pridemo preko reševanja pomožnega problema!

- let r poljuben točk.

~ vzamemo $v \in V \setminus \{r\}$. neumetne so prvotne

switch:

porabljamo case $b_v \geq 0$: dodamo umetno povezavo rv,
če še ne obstaja
$x_{rv} = b_v$

proizvajamo case $b_v < 0$: dodamo umetno vr, če še ne obstaja
$x_{vr} = -b_v$

default: $x_e = 0$ za ostale e

to je ddv:
case $b_v \geq 0$: $b_v - 0 = b_v$
za $v \neq r$: case $b_v < 0$: $0 - (-b_v) = 0$

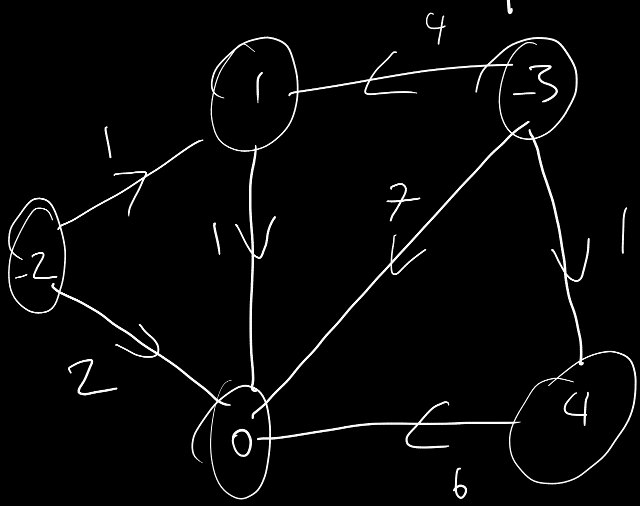
za $v = r$: $\sum_{\substack{v \neq r \\ b_v < 0}} (-b_v) - \sum_{\substack{v \neq r \\ b_v \geq 0}} b_v = -\sum_{v \neq r} b_v = b_r$

prvotne povezave naj imajo ceno 0,
umetne pa 1.

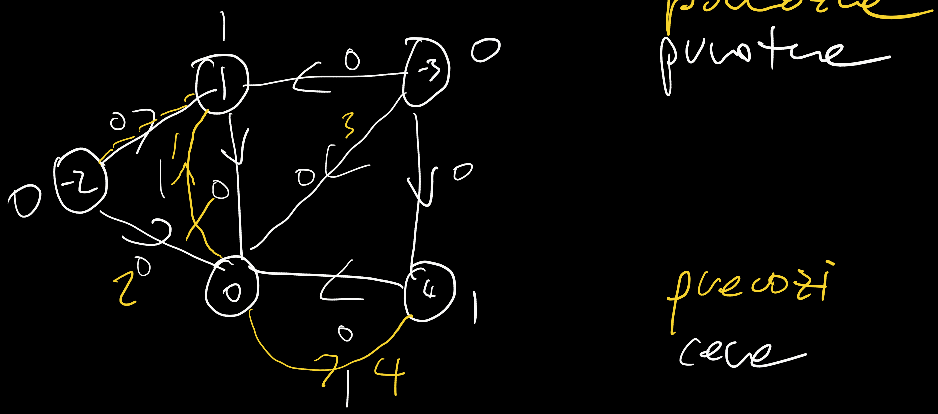
če so cene $v \geq 0 \Rightarrow$ problem je omejen, torej je optimalen.

če je opt. vrednost tega pomožnega problema $= 0$, dobimo dopustno rešitev orig. problema. to odstranimo umetne povezave. če pa je opt. vrednost $\neq 0$, pa dopustna rešitev prvotnega problema ne obstaja!

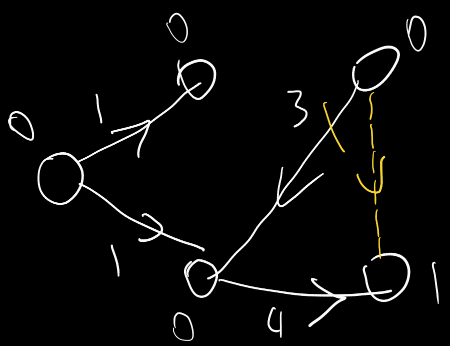
<u>Primer:</u> dokaži, da naslednji problem razvoza ima dopustne rešitve!



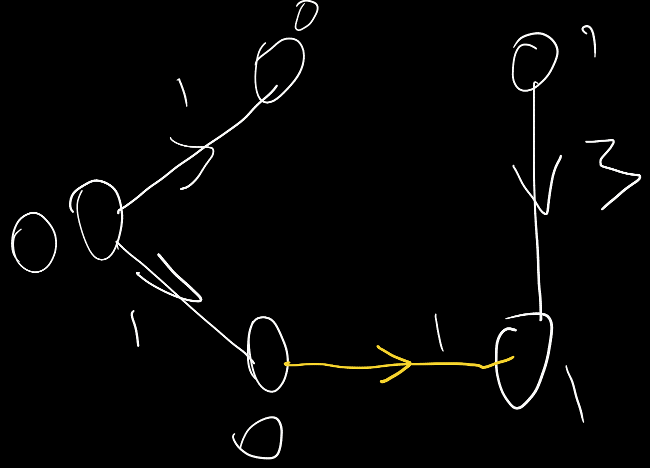
pomožni problem:



------ $0+0<1$ vstopna $t=1$



$0+0<1$ $t=3$



torej:

$0+0 \geq 0$

$0+1 \geq 0$

$1+0 \geq 0$

$1+0 \geq 0$

je opt. reš., ki uporablja umetno povezavo s pozitivnim pretokom $\Rightarrow$ orig. problem ni dopusten.

Opomba: če ne moremo izločiti izstopne povezave $\Rightarrow$ vse povezave v ciklu so prave $\Rightarrow$ lahko jim dodamo poljuben t $\Rightarrow$ problem je neomejen.

Izrek o celoštevilskih rešitvah:

Let $b_v \in \mathbb{Z}$.

1. če $\exists$ dopustna rešitev, obstaja tudi celoštevilska dopustna rešitev.
2. če $\exists$ opt. rešitev, obstaja tudi celošt. opt. reš.

Dodatek: 1. rešimo pomožni problem.
vozlišči se spremenijo $\pm b_i, 0$ in ostanejo celoštevilski.

2. nadaljujemo z drugo fazo. na vsakem koraku imamo celošt. dop. reš., tako tudi na koncu, ko imamo opt. reš.

NASLEDNJI TEDEN SO VAJE NAMESTO PREDAVANJ