OMPFMF 2025-03-14

plačilna matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (vrstic × stolpcev)

a_{ij} ... 2. igralec plača a_{ij} prvemu

strategije: čista / mešana

mešana: vektor verjetnosti

$$x \in \mathbb{R}^n \qquad\qquad y \in \mathbb{R}^m$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$
$$\sum x_i = 1 \qquad\qquad \sum y_i = 1$$

matematično upanje:

$$\max_x \min_y x^T A y \underset{\text{izrek od prej}}{=} \min_y \max_x x^T A y$$

s stališča 1. igralca:

$$\begin{aligned} &\max \quad s \\ &\text{p.p.} \quad s \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \quad \text{za vsak } j \in \{1..n\} \\ &\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{in} \quad \forall i: x_i \geq 0 \end{aligned}$$

rešimo z dvofazno simpleksno metodo.

opt. strat. za $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ je $\Big(\big(\underbrace{(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3})}_{\text{opt. strat.}}, \underbrace{0}_{\text{opt. vrednost}}\big), \underbrace{\big((\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}), 0\big)}_{\text{2. igralec}}\Big)$

blotto: $\Big(\big(\tfrac{4}{9}, 0, \tfrac{1}{9}, 0, \tfrac{4}{9}\big), \tfrac{14}{9}\Big), \Big(\big(\tfrac{7}{90} \ \dots$

Igra Morra: z levico pokažemo en ali dva prsta, z desnico napovemo, koliko prstov bo pokazal drugi igralec s svojo levico.

Če uganemo, dobimo toliko evrov, kolikor sta oba igralca pokazala s svojima levicama.

matrika:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1,1 & 1,2 & 2,1 & 2,2 & \max_{\xi} \\
\hline
1,1 & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\
1,2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
2,1 & 3 & 0 & 0 & -4 & 0 \\
2,2 & 0 & -3 & 4 & 0 & -1/5 \\
\hline
\min_{\eta} & 0 & 0 & 0 & 1/5 & \geq 0
\end{array}
$$

ena rešitev: ~~$\left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$~~

vse optimalne strategije: $(0, t, 1-t, 0)$ za $t \in [4/7, 3/5]$

<u>Def:</u> $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Rečemo, da x dominira x', če je $x \geq x'$ (po komponentah).

Če v A i-ta vrstica dominira j-to, lahko j-to izbrišemo.

Če i-ti stolpec dominira j-tega, pa lahko izbrišemo i-tega.

Primer:
$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 & -3 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}
$$

Poenostavljen poker

2 igralca, 3 karte (1,2,3)

licitacija: oba stavita 1, prvi igralec 0/1
dugi igralec 0/1, prvi igralec:
če dobi 0,1, lahko 1/0, sicer 0.

igralca A in B

A	B	A	zmagal	dobitek
				1
0	0	/	višja karta	1
0	1	0	B	2
0	1	1	višja karta	1
1	0	/	A	1
1	1	/	višja karta	2

za 1. igralca

stava

A1 stavi 0, če B stavi 1, spet 0
stavi 0, če B stavi 1, A spet stavi 1
A2 stavi 0, če
A3 stavi 1

za 2. igralca:

stava

B1 stavi 0
B2 stavi enako kot A
B3 stavi nasprotno kot A
B4 stavi 1

strategija prvega igralca je trojica

27 strategij

(A_i, A_j, A_k)

→ če dobi 1 → če dobi 2 → če dobi 3

strategija drugega: (B_1, B_0, B_2) 64 strategij

primer: $Q\big((3,1,2),(1,2,4)\big) = \frac{1}{6}\cdot(-2-2+1-1+1+1) = -\frac{1}{3}$

A	B	licitacije	dobitek
1	2	1 1	-2
1	3	1 1	-2
2	1	0 0	1
2	3	0 1 0	-1
3	1	0 0	1
3	2	0 0	1

matematično upanje

optimizacija:

1. igralec: če ima karto 1, A1 dominira A2.

če ima karto 3, A2 dominira A1.

če ima karto 2, A2 dominira A3.

če ima 2. igralec 1:

A2 00^{+1} ali 011^{+2}

A3 10^{+1}

če ima 2. igralec 3:

A2 011^{-2}

A3 11^{-2}

ostane še 8 strategij za A

8 vrstic v plačilni tabeli

2 igralec: če ima karto 1:

B2 in B4 nista smiselni.

če ima karto 3:

izberemo vedno B4

če ima karto 2:

B1 dominira B3 in

B2 dominira B4

če ima 1. igralec 1:

$$\begin{array}{ll} B1\ 00^{-1} \text{ ali } 10^{+1} & B2\ 00^{-1} \text{ ali } 11^{-2} \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} \\ B3\ 01^{-1} \text{ ali } 10^{+1} & B4\ 01^{-1} \text{ ali } 11^{-2} \end{array}$$

če ima 1. igralec 3:

$$\begin{array}{ll} B1\ 00^{+1} \text{ ali } 10^{+1} & B2\ 00^{+1} \text{ ali } 11^{+2} \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & \rotatebox{90}{$\leq$} \\ B3\ 011^{+2} \text{ ali } 10^{+1} & B4\ 011^{+2} \text{ ali } 11^{+2} \end{array}$$

ostaneje le še 4 strategije za B.

$\Rightarrow$ 8x4 plačilna tabela

$$A = \begin{array}{c} \\ 112 \\ 113 \\ 122 \\ 123 \\ 312 \\ 313 \\ 322 \\ 323 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 114 & 124 & 314 & 324 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/6 & -1/3 & -1/6 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 & 1/6 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & -1/3 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & -1/6 \end{bmatrix} \end{array}$$

5-parametrična rešitev:

ena rešitev je takale:

$$x^*_{112} = 2/3 \qquad x^*_{122} = 1/3$$

$$y^*_{114} = 2/3 \qquad y^*_{324} = 1/3$$

$$v^* = \frac{-1}{18}$$

PROBLEM RAZVOZA

angl. transshipment problem

3 mesta, v 1. proizvajamo 7 enot mleka, v 2. in 3. pa porabljamo 3 oz. 4 enote mleka.

stroški prevoza:

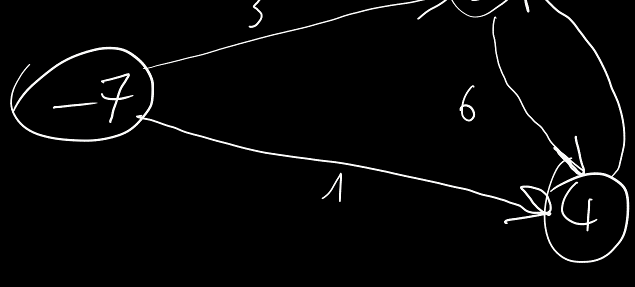
$1 \to 2$: 3/enota

$1 \to 3$: 1/enota

$2 \to 3$: 6/enota

$3 \to 2$: 1/enota.

Kako s čim manjšimi stroški zadovoljiti potrebe po mleku?



dopustna rešitev cene 13: direktno iz mesta 1 pošljemo 3 enote v 2 in 4 enote v 3.

dopustna rešitev cene 10: 7 enot v mesto 3, 3 enote v mesto 2.

Naloga: Usmerjen utežen graf.
V in E

angl. digraph

$G = (V, E)$ $\quad b_v \in \mathbb{R}$ za vsako vozlišče

$b_v > 0$ mesto porabljamo

$b_v < 0$ mesto proizvajamo

$c_e \in \mathbb{R}$ za $e \in E$

↳ lahko so negativne

$$\sum_{v \in V} b_v = 0$$

Iščemo $\overline{(x_e)_{e \in E}}^{\text{vektor}}$: $x_e \geq 0$

za vsako vozlišče $v \in V$: $\displaystyle\sum_{\text{konec}(e)=v} x_e - \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e = b_v$

Kirchoffov zakon

minimiziramo $\displaystyle\sum_{e \in E} x_e \cdot c_e$

V našem mlečnem primeru treh mest:

$$\min \quad 3x_{12} + x_{13} + 6x_{23} + x_{32}$$

p.p. $\quad -x_{12} - x_{13} = -7$

$$x_{12} + x_{32} - x_{23} = 3$$

$$x_{13} + x_{23} - x_{32} = 4$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32} \geq 0$$

Problem razvoza DR:

$$\min \quad c^T x$$

p.p. $\quad Ax = b$

$$x \geq 0$$

$\sim$ v splošni obliki:

$$\max \quad (-c)^T x$$

p.p. $\quad -Ax = -b$

$$x \geq 0$$

$$b = [b_v]_{v \in V}$$

$$c = [c_e]_{e \in E}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

incidenčna matrika

$$A = [a_{ve}]_{v \in V, e \in E}$$

$$a_{ve} \in \{-1, 1, 0\}$$

v začetek e

v konec e

v ni krajišče e

dual: $\quad \min \; -b^T y$

p.p. $\quad (-A)^T y \geq -c$

$\sim \quad \max \; b^T y$

p.p. $\quad A^T y \leq c$

$$\int$$

$$\max \sum_{y=1}^{n=|V|} b_i y_i$$

p.p. $y_j - y_i \leq c_{ij}$ oz $y_i + c_{ij} \geq y_j \quad \forall i,j \in E$

Opomba: splošen L.P.:

$$\max \quad c^T x$$

p.p. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i \in \{1, \dots, m'\}$

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \qquad i \in \{m'+1, \dots, m\}$

$x_j \geq 0 \qquad j \in \{1, \dots, n'\}$

dual

$$\min \quad b^T y$$

p.p. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad j \in \{1, \dots, n'\}$

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = c_j \qquad j \in \{n'+1, \dots, n\}$

$y_i \geq 0 \qquad i \in \{1, \dots, m'\}$

Kaj pove izrek o dualnem dopolnjevanju?

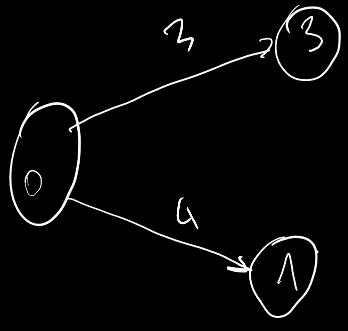
Kdaj x, y dopustni rešitvi za P, P'?

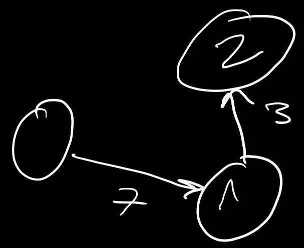
x, y opt. $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m'\}: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ ali $y_i = 0$

in $\forall j \in \{1, \dots, n'\}: x_j = 0$ ali $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Trditev: x, y dopustna za PR in PR':
(— itak velja)

$$x, y \text{ opt.} \Leftrightarrow \forall ij \in E: x_{ij} = 0 \lor y_i + c_{ij} = y_j$$





$3+6 \geq 1$ ✓

$1+1 \geq 3$ ✗

$0+3 \geq 2$ ✓

$2+6 \geq 1$ ✓

je dopustna in optimalna

Problem razvoza rešimo z dvofazno simpleksno metodo. Mi ga bomo rešili s simpleksno metodo na omrežjih.

Suma enaka števila

Opomba: y je dopustna (optimalna) rešitev duala $\Leftrightarrow$ $y+(\varepsilon, \dots, \varepsilon)$ je dopustna (optimalna) rešitev duala.

Krit. fja duala $\sum_{i=1}^{n} b_i (y_i + \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i}_{=0}$

po predpostavki

Opomba: x dop. za PR $(Ax=b)$

$[1, \dots, 1] \backslash$

$$Ax = b$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

<u>Motivacija za prihodnjič</u>: