OMPFMF 2025-03-07

primer:

$$\max \quad x_1 + x_2$$
$$\text{p.p.} \quad x_1 \leq -1$$
$$x_1 \geq 0$$

prva faza $\quad \min \quad x_0$

$$x_2 = -1 - x_1 + x_0$$
$$w = -x_0$$

$$x_0 = 1 + x_1 + x_2$$
$$w = -1 - x_1 - x_2$$

---

	predpostavke	sklep
ŠID	x dop. za P y dop. za P'	$c^T x \leq b^T y$
KID	x^* opt. za P	$\exists\, x^*$ opt za P in $c^T x^* = b^T y^*$
DD	x dop. za P y dop. za P'	x, y opt $\Leftrightarrow$ ... $\wedge$ ... $\wedge$ ...

EKONOMSKI POMEN DUALNIH SPREMENLJIVK

tarifa $\quad x_1^* = 0 \quad x_2^* = 20 \quad x_3^* = 25 \quad\quad z^* = 200$

$$0 + 20 + 25 < 50$$
$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 25 < 250$$
$$10 \cdot 0 + 15 \cdot 20 + 12 \cdot 25 = 600$$

Če se b_1 (50) spremeni v 51, je z^* še vedno 200.
Če se b_2 (250) spremeni v 251, je z^* še vedno 200.

če se b_3 (600) spremeni v 601, se z^* poveča na $200 + \frac{1}{3}$.

se izkaže po izdelavi simpleksne metode znova.

opt. rešitev dualnega problema je $y_1^* = 0$ $y_2^* = 0$ $y_3^* = \frac{1}{3}$

Izrek (ne bomo dokazali): naj ima P enolično optimalno bazno rešitev (vse bazne spr. so različne od 0) ZOB v zadnjem slovarju so vsi konstantni koeficienti > 0. Potem $\exists \varepsilon > 0 \ni: \Delta z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \Delta b_i$, če je $|\Delta b_i| \leq \varepsilon$, kjer je $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ opt. rešitev za P'.

y_i^* nam daje „tržno" vrednost dobrine i.

ali se kmetiji splača vzeti kredit? da, če je stroošek kredita za 1€ manjši kot ⅓ €.

ali se kmetiji splača kupiti več zemlje? ne.

[DUAL SPLOŠNEGA LP]

Kot P:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.p. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ za $i \in \{1, \dots, m'\}$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ za $i \in \{m'+1, \dots,$

$x_j \geq 0$ za $j \in \{1, \dots, n'\}$

dual programa P je P':

$$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

p.p. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$ za $j \in \{1, \dots, n'\}$

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$ za $j \in \{n'+1, \dots, n\}$

$y_i \geq 0$ za $i \in \{1, \dots, m'\}$

SPOMNIMO

LP v std obliki:
nenegativna spremenljivka P $\Leftrightarrow$ neenakost P'
neenakost P $\Leftrightarrow$ nenegativna spr. P'

Kaj pa za splošni LP?

nenegativna spr. P ustreza neenakosti P'
neenakost P ustreza nenegativni spr. P'
poljubna spremenljivka P ustreza enakosti P'

$\hookrightarrow$ lahko $\geq, \leq 0$

enakost P ustreza poljubni spremenljivki P'

Dokaz: PRETVORIMO V STD OBLIKO

$$\max \sum_{j=1}^{n'} c_j x_j + \sum_{j=n'}^{n} c_j (x_j' - x_j'')$$

p.p. $\sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_j + \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} (x_j' - x_j'') \leq b_i$ za $i \in \{1, \dots, m\}$

$- \sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_j - \sum_{j=n'+1}^{n} a_{ij} (x_j' - x_j'') \leq -b_i$

$i \in \{m'+1, \dots, m\}$

$x_j \geq 0$ za $j \in \{1, \dots, n'\}$

$x_j', x_j'' \geq 0$ za $j \in \{n'+1, \dots, n\}$

Dual P:

$$\min \sum_{i=1}^{m'} b_i y_i + \sum_{i=m'+1}^{m} b_i y_i' - \sum_{i=m'+1}^{m} b_i y_i''$$

$$\text{p.p.} \sum_{i=1}^{m'} a_{ij} y_i + \sum_{i=m'+1}^{m} a_{ij} y_i' - \sum_{i=m'+1}^{m} a_{ij} y_i'' \geq c_j$$

za vse $j \in \{1, \dots, n\}$

$$-\sum_{i=1}^{m'} a_{ij} y_i - \sum_{i=m'+1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=m'+1}^{m} a_{ij} y_i'' \geq -c_j$$

za vse $j \in \{n'+1, \dots, n\}$

$y_i \geq 0$ za vse $i \in \{1, \dots, m'\}$

$y_i', y_i'' \geq 0$ za $i \in \{m'+1, \dots, m\}$

Primer: P: $\max -2x_1 + 2x_2 - 3x_3$

p.p. $x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -4$

$x_1 + 4x_3 \leq 5$

$x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$

$x_2 \geq 0$

dual:

$\min -4y_1 + 5y_2 + y_3$

p.p. $y_1 + y_2 + y_3 = -2$

$y_1 - 2y_3 \geq 2$

$-3y_1 + 4y_2 - y_3 = -3$

$y_1, y_2 \geq 0$

[MATRIČNE IGRE] teorija iger

VTSRČEV LČSPF
HEZ

matrična igra je igra za dva igralca.
vsak igralec ima točno možnosti:

1. igralec n izbir
2. igralec m izbir.

če 1. igralec izbere i-to, 2. pa j-to možnost,
drugi igralec prejme plača $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

$$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

primer: kamen škarje papir

$$\text{plačilna matr. } A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Š & K & P \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

primer: blotto: polkovnik blotto, njegov član se bori za dve strateški točki. blotto ima 4 bataljone, član 3. vsak od njiju se odloči, kako bataljone razporediti med dve strateški točki. blotto ima 5 strategij, član pa 4: 3+0, 2+1, ...

zmaga tisti, ki ima več bataljonov na posamezni strateški točki. na vsaki točki poraženec plača $t+1$, kjer je t število upegorih bataljonov.

$$A = \begin{array}{c|cccc} & 3+0 & 2+1 & 1+2 & 0+3 \\ \hline 4+0 & 4 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 3+1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2+2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ 1+3 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0+4 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Igrata po principu najmanjšega tveganja.
igralec izbere potezo, ki ima največjo vrednost najslabšega rezultata.

$$M_1 = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$M_2 = \min_j \max_i a_{ij}$$

Trditev $M_1 \le M_2$ za matrično igro:

Dokaz: M_1 dosežen v (i_1, j_1)
M_2 dosežen v (i_2, j_2)

velja

$$M_1 \le \boxed{a_{i_1 j_2}} \le M_2 \qquad \square$$

Definicija: (i_0, j_0) je sedlo matrike A, če je $a_{i_0 j_0}$ najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & \boxed{1} & 2 & \boxed{1} \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ sedli

pri blefu ni sedla

Trditev: matrika A ima sedlo $\Leftrightarrow M_1 = M_2$

Dokaz: $(\Rightarrow)$ let (i_0, j_0) sedlo.

$$M_1 \ge \min_j a_{i_0 j} = a_{i_0 j_0} = \max_i a_{i j_0} \ge M_2$$

od prej velja $M_1 \le M_2 \Rightarrow M_1 = M_2$

($\Leftarrow$) M_1 dosežen v (i_1, j_1)
M_2 dosežen v (i_2, j_2)

(i_1, j_2) je sedlo

$$M_1 = a_{i_1 j_1} \leq a_{i_1 j_2} \leq a_{i_2 j_2} = M_2 = M_1$$

$\Rightarrow a_{i_1 j_2}$ je najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu. $\square$

Če je (i_0, j_0) sedlo, je i_0 opt. strategija za 1. igralca in j_0 opt. strategija za 2. igralca.

Zanimale nas bodo mešane strategije:

1. igralec izbere $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$x_i \geq 0$$
$$x_1 + \dots + x_n = 1$$

x_i pomeni verjetnost, da 1. igralec izbere strategijo i.

2. igralec izbere $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}$.
$$y_1 \geq 0$$
$$y_1 + \dots + y_n = 1$$

y_j pomeni verjetnost, da II. igralec izbere strategijo j.

$(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ je „čista strategija".

če ima plačilna matrika sedlo, izbereta oba igralca čisto strategijo.

expected value (angl.)

Matematično upanje (povprečje):

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{x_i y_j}_{\text{produkt verjetnosti}} \cdot a_{ij} =$$

ker sta dogodka neodvisna.

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \right)}_{(Ay)_i} = x^T A y$$

1. igralec: izbere $\max_x \min_y x^T A y$

2. igralec: izbere $\min_y \max_x x^T A y$

zvezna fja na kompaktu (zaprta in omejena množica) doseže max/min, zato zgornji med. obstajata

Trditev:

$$\max_x \min_y x^T A y \leq \min_y \max_x x^T A y$$

Dokaz:

let max min dosežen v (x', y'), min max pa v (x'', y''). tedaj velja

$$x'^T A y' \leq x'^T A y'' \leq x''^T A y'' \qquad \square$$

ZADNJA URA V ZVEZKU!