~[DUALNOST PRI LINEARNEM PROGRAMIRANJU]~

primer knjige od prej:

problem $P =$

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{p.p.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 50 && / \cdot y_1 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 250 && / \cdot y_2 \\ & 10x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 6 && / \cdot y_3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

radi bi našli zgornjo mejo za kriterijsko f.o.

množimo enačbe z nenegativnimi koeficienti in seštejemo:

$$\underbrace{(y_1 + 3y_2 + 10y_3)}_{\geq 3} x_1 + \underbrace{(y_1 + 4y_2 + 15y_3)}_{\geq 5} x_2 + \underbrace{(y_1 + 5y_2 + 12y_3)}_{\geq 4} x_3 \leq$$

$$\leq 50y_1 + 250y_2 + 600y_3$$

če veljajo ti pogoji, velja $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 50y_1 + 250y_2 + 600y_3$

problemu P dualni problem P':

$$\begin{aligned} \min \quad & 50y_1 + 250y_2 + 600y_3 \\ \text{p.p.} \quad & y_1 + 3y_2 + 10y_3 \geq 3 \\ & y_1 + 4y_2 + 15y_3 \geq 5 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

vsaka dopustna rešitev dualnega problema nam da zgornjo mejo za vrednost prvotnega problema. min kriterijske fje duala nam da najmanjšo zgornjo meje prvotnega problema.

dualni program

Primer:

P: $\max\ c^T x$

p.p. $Ax \leq b$

$x \geq 0$

P': $\min\ b^T y$

p.p $A^T y \geq c$

$y \geq 0$

dualne spremenljivke

tolikor jih je, kolikor je neenačb v prvotnem problemu.

$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

p.p. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$

$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

p.p. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad \forall j \in \{1..n\}$

$y_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1..m\}$

<u>Trditev:</u> Dual duala je prvotni problem. $P'' = P$

<u>Dokaz:</u> P' v std. obliki:

$\max\ (-b)^T y$

p.p. $(-A^T) y \leq -c$

$y \geq 0$

P'': $\min\ (-c)^T x$

p.p $(-A^T)^T x \geq -b$

$x \geq 0$

je res prvotni problem P

Izrek: Šibki izrek o dualnosti (ŠIO).

Predpostavki:
- x je dopustna rešitev problema P
- y je dopustna rešitev problema P'

$$\Longrightarrow \quad c^T x \le b^T y$$

Dokaz:

Prvi način: predpostavke $Ax \le b$, $x \ge 0$, $A^T y \ge c$, $y \ge 0$

$\cdot x$, ker $x \ge 0$

$\cdot y^T$, ker $y \ge 0$

računajmo $c^T x \le (A^T y)^T x = y^T A x = y^T (Ax) \le y^T b = b^T y$ □

množili smo $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \ge c_j \quad \forall j \in \{1..n\}$ z x_j

Drugi ekvivalenten način:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \le \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}_{\text{iz vrstic poglavja}} \Big) y_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Posledica 1: naj velja
x dopusten za P, y dopusten za P',
$c^T x = b^T y$. sledi, da je x
optimalna rešitev za P in y optimalna
rešitev za P'.

Če torej izvemo optimalno rešitev P in P', lahko preverimo, da je res optimalna.

Dokaz: let x' dopustna za P.

$$c^T x' \underset{\text{ŠID}}{\leq} b^T y \overset{\text{predp.}}{=} c^T x \Rightarrow c^T x' \leq c^T x$$

let y' dopustna za P'

$$b^T y' \overset{\text{ŠID}}{\geq} c^T x \overset{\text{predp.}}{=} b^T y$$

Posledica 2: naj bo P neomejen. tedaj je P' nedopusten.

Dokaz: dopustna rešitev P' daje po ŠID zgornjo mejo za P.

končna slovarja za tvetijo in njen dual:

$$x_2 = 40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6$$

$$x_4 = 10 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{15}x_6$$

$$x_5 = 90 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{4}{15}x_6$$

$$z = 200 - \frac{1}{3}x_1 - 0\cdot x_2 - 0\cdot x_3 - 0\cdot x_4 - 0\cdot x_5 \cdot \frac{1}{3}\cdot x_6$$

dualni:

$$y_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{15}y_1 - \frac{4}{15}y_2 + \frac{1}{15}y_5$$

$$y_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_5$$

$$y_6 = \frac{1}{5}y_1 + \frac{9}{5}y_2 + \frac{4}{5}y_5$$

$z = -200 - 10y_1 - 30y_2 - 0 \cdot y_3 - 0 \cdot y_4 - 40y_5 - 0 \cdot y_6$

Izrek: Krepki izrek o dualnosti (KID).

Če je P optimalen problem, potem je tudi P' optimalen, optimalni vrednosti sta enaki.

ekvivalentno: $\exists x^*$ opt. reš. $P \Rightarrow \left(\left(\exists y^* \text{ opt. reš. } P' \right) \land c^T x^* = b^T y^* \right)$

Dokaz: po predpostavki je P optimalen. P gotovo lahko pretvorimo v std. obl. in ga rešimo z (dvofazno) simpleksno metodo. Oglejmo si zadnji slovar:

opt. vrednost

števec v zadnjem slovarju

$$z = v^* + \sum_{j=1}^{n+m} c_j^* x_j$$

prvotne dopolnilne

velja $c_j^* \leq 0$ in $c_j^* = 0 \Leftrightarrow x_j$ bazna

Ugane opt. vrednost za P': $y_i^* := -c^*_{n+i}$

sedaj pa dokažimo, da je y dopustna rešitev dualnega. Očitno so to nenegativna št.

ni pa očitno, da je y dopustna.

$$v^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

dopolnilna

$$z = v^* + \sum_{j=1}^{n+m} c_j^* x_j = v^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} c^*_{i+n} x_{i+n} =$$

$c^*_{i+n} = y_i^*$, $\quad x_{i+n} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$

$$= v^* + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j + \sum_{i=1}^{m} (-y_i^*)\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) =$$

$$= \underline{v^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j^* + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij}\right)} x_j = $$

po definiciji problema

$$= \underline{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}$$

linearno fjo z smo napisali na dva načina, ki morata biti enaka, torej

$$v^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = 0$$ (DC offset / prosti člen)

$$\forall j \in \{1..n\} \quad c_j^* + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$$ (koeficienti pred spremenljivkami)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j - \underbrace{\boxed{c_j^*}}_{\leq 0,\ \geq 0} \geq c_j \qquad \forall j \in \{1..n\}$$

to so neenakosti duala!

Torej je y^* dopustna rešitev za P'.

$$v^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \xrightarrow[\text{ŠID}]{\text{posledica 1}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^* \text{ opt za } P}_{\text{iz predpostavka}} \text{ in } y^* \text{ opt. za } P' \text{ in optimalni vrednosti sta enaki.}$$

ZQGEOMDUAL NTSBS

P \ P'	nedop.	neom.	opt.
nedop.	mogoče	mogoče, ŠID	nemogoče, ker KID
neomej.	mogoče, ŠID	nemogoče, ker ŠID	nemogoče, ker ŠID / KID
opt.	nemogoče, ker KID	nemogoče, ker ŠID / KID	mogoče, krepka

$\max 2x_1 - x_2$

p.p. $-x_1 + x_2 \leq -2$

$x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$

dual

$\min -2y_1 + y_2$

p.p. $-y_1 + y_2 \geq 2$

$y_1 - y_2 \geq -1$

$y_1, y_2 \geq 0$

sta oba očitno nedopustna

za P, P' velja natanko ena od možnosti:

- oba optimalna
- oba nedopustna
- en neomejen, drugi nedopusten

<u>Izrek:</u> o dualnem dopolnjevanju.

angl. complementary slackness.

let x dopustna rešitev za P in
y dopustna rešitev za P'.

x in y sta optimalna $\iff$

$$\boxed{\begin{aligned} &\forall j \in \{1..n\}: \left(x_j = 0 \vee \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j\right) \wedge \\ \wedge\ &\forall i \in \{1..m\}: \left(y_i = 0 \vee \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\right) \end{aligned}}$$

Dokaz:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \le$$

pocovitev ŠID

$$\le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = D$$

KIO pravi, da x, y optimalni $\iff L = D$

$\left(\begin{array}{l} \Longrightarrow \text{KIO} \\ \Longleftarrow \text{ŠIO} \end{array}\right)$

$$\iff \forall j \in \{1..n\}: c_j x_j = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) \text{ in } \forall i \in \{1..m\}: \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j\right) y_i = b_i y_i$$

$\iff \boxed{\quad}$ (očitno)

opomba

x, y dop. $\Longrightarrow$ x, y opt $\iff \Big(\forall i,j: \; x_j > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

in $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \Rightarrow y_i = 0\Big)$

Primer: Dokaži, da je $(0,20,25)$ opt. rešitev problema kmetije.

1. korak: preverimo dopustnost.

- $0, 20, 25 \ge 0$ ✓
- $0 + 20 + 25 \le 50$ ✓ celo $<$
- $3 \cdot 0 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 25 \le 250$ ✓ celo $<$
- $10 \cdot 0 + 15 \cdot 20 + 12 \cdot 25 \le 600$ ✓ celo $=$

2. korak: vsak pozitiven x_j nam da enakost za dualne spremenljivke.

$$y_1^* + 4y_2^* + 15y_3^* = 5$$
$$y_1^* + 5y_2^* + 12y_3^* = 4$$

3. korak: vsaka neenakost iz koraka 1, izpolnjena z <, nam da eno ničelno dualno spremenljivko. $y_i = 0$:

$$y_1 = y_2 = 0$$

4. korak rešimo dobljen sistem linearnih enačb iz 3. in 4. koraka in preverimo dopustnost rešitve.

$$y_1^* = 0 \quad y_2^* = 0 \quad y_3^* = \frac{1}{3}.$$

preostala neenakost : $0 \cdot \cancel{y_1}^{0} + 3 \cdot \cancel{y_2}^{0} + 10 \cdot \cancel{y_3}^{1/3} \geq 3$

$$10 \cdot 1/3 \geq 3 \checkmark$$

opomba: tole ne dela vedno.

primer: dokaži, da je $(0,0,50)$ opt. reš. za tretjo

1. $0+0+50 = 50$
$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 50 = 250$
$10 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 12 \cdot 50 = 600$

2. $y_1^* + 5y_2^* + 2y_3^* = 4$

3. $\emptyset$

4. 1 enačba, 3 spremenljivke, več rešitev najti je treba tisto pravo dopustno.