OMPFMF 2025-02-21

LP v std obl. $(\le)$

$$\max \quad c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

p.p. $\quad a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \le b_1$

$\dots$

$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \le b_m$

$$x_1, \dots, x_n \ge 0$$

matrična oblika

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\max \quad c^T x \qquad \text{p.p. } Ax \le b, \quad x \ge 0$$

orodje za reševanje LPVSO -- simpleksna metoda

naj bo P lpvso. napišemo prvi slovar:

vpeljemo dopolnilne spremenljivke, toliko jih je, kolikor je omejitev:
$$x_{n+1} := b_1 - a_{11} x_1 - \dots - a_{1n} x_n$$
$$\vdots$$
$$x_{n+m} := b_m - a_{m1} x_1 - \dots - a_{mn} x_n$$

navedimo to za problem kmetije od prej:

$$\max \quad 240 x_1 + 400 x_2 + 320 x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 50$$
$$60 x_1 + 80 x_2 + 100 x_3 \le 5000$$
$$400 x_1 + 600 x_2 + 480 x_3 \le 24000$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

delimo vse enačbe z največjim stupnim deliteljem

$$\max \quad 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

p.p. $\quad x_1 + x_2 + x_3 \le 50$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 250$$
$$10x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 600$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

prvi slovar

$$x_4 = 50 - x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_5 = 250 - 5x_3 - 4x_2 - 3x_1$$
$$x_6 = 600 - 10x_1 - 15x_2 - 12x_3$$
$$z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \longrightarrow \text{fja, ki jo maksimiziramo}$$

(**)

slovar: $m+1$ enačb

bazne spremenljivke

m spremenljivk in spremenljivka z so izražene s preostalimi n spremenljivkami. nebazne

prvi slovar: dopolnilne spremenljivke izražene s prvotnimi, torej dopolnilne so bazne, prvotne pa nebazne.

slovar je dopusten $\Leftrightarrow$ so konstantni koeficienti pri vseh baznih spremenljivkah nenegativni.

$\forall i: b_i \geq 0$. če ~~$\forall i: b_i \geq 0$~~, uporabimo dvofazno simpleksno metodo (kasneje). zaenkrat predpostavimo dopustnost.

v simpleksni metodi tudi za dopolnilne spremenljivke velja, da so vselej nenegativne

če je slovar dopusten, nam da je bazno dopustno rešitev: vse nebazne spremenljivke postavimo na 0. BDR

sedaj želimo povečati z.

izberemo nebazno spremenljivko s pozitivnim koeficientom v kriterijski fji z. rečemo ji vstopna spremenljivka.

vzamemo tisto bazno spremenljivko, ki nam zapoveduje

najnižjo zgornjo mejo za vstopno spremenljivko (x_0).
nastavimo vhodno spremenljivko na to zgornjo mejo.
tedaj je $x_0 = 0$. zamenjamo vlogo x_0 in vstopne spremenljivke
(tako, da izrazimo) in postopek nadaljujemo.

katero kandidatko za vstopno spremenljivko izberemo?
vsega je lahko načinov:
- izberemo tisto z najmanjšim indeksom
- tisto z največjim koeficientom v z.
  ↳ v praksi nekoliko hitrejše računanje.
- pravilo največjega povečanja. tisto, ki jo lahko z največ povečamo upoštevaje omejitve in koeficiente

vsaka bazna spremenljivka nam pove, za koliko se lahko poveča vstopna spremenljivka.
za izstopno spremenljivko (x_0) izberemo tisto, ki vstopno najbolj omeji. To je pivotna vrstica.
V pivotni vrstici vstopno vrstico izrazimo z ostalimi in izstopno spremenljivko vstavimo v nebaznici
vse ostale vrstice slovarja.

(**) naj bo x_2 vstopna.

omejitve:
$$x_2 \le 50$$
$$x_2 \le \frac{250}{4}$$
$$x_2 \le \frac{600}{15} = 40$$
→ izberemo x_6 kot izstopno spr.

$$x_2 = 40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6$$
vstavi v prvi slovar, da dobiš drugi slovar

$$x_4 = 50 - x_1 - \left(40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6\right) - x_3$$
$$x_5 = 250 - 3x_1 - 4\left(40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6\right) - 5x_3$$
$$x_2 = 40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6$$

$$z = 3x_1 + 5\left(40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6\right) + 4x_3$$

$$\Big\downarrow \text{ drugi slovar}$$

$$x_2 = 40 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{15}x_6$$
$$x_4 = 10 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{15}x_6$$
$$x_5 = 90 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{4}{15}x_6$$
$$z = 200 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_6 \longrightarrow x_3 \text{ ima koeficient } 0$$

Ker ni več nobene spremenljivke s pozitivnim koeficientom, smo končali -- našli optimalno rešitev.

$x_1^* = 0$

$x_2^* = 40 \longrightarrow z^* = 200$

$x_3^* = 0$

$x_4^* = 10$ → toliko zemlje ostane

$x_5^* = 90$ → toliko človekur ostane

$x_6^* = 0$ → porabili smo ves kapital

opomba:
enačbe smo prej delili!

vse rešitve:

$x_1^* = 0$ $\quad t \geq 0$

$x_2^* = 40 - \frac{4}{5}t$ $\quad t \leq 50$

$t \in [0, 50]$ $\quad x_3^* = t$

$x_4 = 10 - \frac{1}{5}t \geq 0 \quad t \leq 50$

$x_5 = 90 - \frac{9}{5}t \geq 0 \quad t \leq 50$

če je koeficient vstopne spremenljivke pri každni bazni spremenljivki ≥ 0, nam to ne daje omejitve za vstopno spremenljivko oz $x_i \leq \infty$.

če nam nobena bazna spremenljivka ne omejuje vstopne spremenljivke, je problem neomejen — končamo.

degeneriran korak simpleksne metode: lahko se zgodi, da je ena od omejitev $x_i \leq 0$. v tem primeru se vrednost kriterijske fje ne poveča.

Ali se simpleksna metoda zagotovo ustavi? ne. slovarjev je točno mnogo — $\binom{m+n}{n}$. simpleksna metoda se lahko zacikla. koraki v ciklu morajo biti degenerirani.

ciklanje je izjemno redek pojav, ker se mu lahko izognemo.

Izrek: če uporabljamo pravilo najmanjšega indeksa za vstopne in izstopne spremenljivke, do ciklanja ne pride. ne bomo dokazali.

časovna zahtevnost: Primer: (Klee - Minty)
nepolinomska

$$\max \quad 100x_1 + 10x_2 + x_3$$

p.p.

$$x_1 \leq 1$$
$$20x_1 + x_2 \leq 100$$
$$200x_1 + 20x_2 + x_3 \leq 10000$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

metoda največjega koeficienta: 7 korakov oz. $2^n - 1$ v splošnem.

če izberemo x_n: 1 korak

Torej: v teoriji je SX metoda lahko počasna, v praksi pa je zelo učinkovita in hitra.

obstajajo tudi dokazljivo polinomske metode ⟶ mlogh

LP je v stopnji problemov P.

recimo elipsoidna metoda

ali metoda notranjih točk.

geometrijsko: sprehajamo se po ogliščih poliedra, dokler ne pridemo do maksimuma.

kaj pa, če ~~$\forall i: b_i \geq 0$~~?

dva tipa vitaminskih tablet: Polivit, Oligovit

vitamini: B, C, D

	B	C	D	cena/tableto
P	1	4	1	12
O	1	1	2	10
dnevna potreba	7	13	8	

$$\min \quad 12x_1 + 10x_2$$

p.p.
$$x_1 + x_2 \geq 7$$
$$4x_1 + x_2 \geq 13$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

std. obliki:

$$\max \quad -12x_1 - 10x_2$$

p.p.
$$-x_1 - x_2 \leq -7$$
$$-4x - x_2 \leq -13$$
$$-x_1 - 2x_2 \leq -8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

dvofazna simpleksna metoda:

1. faza: preverimo dopustnost. ker bi ni najmo ≥ 0, $x_1 = \dots = x_n = 0$ ni več dopustna rešitev.

rešimo LP

$$\min \quad x_0$$

p.p.
$$-x_1 - x_2 \leq -7 + x_0$$
$$-4x_1 - x_2 \leq -13 + x_0$$
$$-x_1 - 2x_2 \leq -8 + x_0$$
$$x_0, x_1, x_2 \geq 0$$

to je dopusten problem. ki ni neomejen. (ker $x_0 \geq 0$),

optimalna vrednost tega problema je $0 \iff$ prvotni problem je dopusten.

prvi slovar ↳

ta slovar ni dopusten, niti ni $\exists$ kandidatka za vhodno spremenljivko

$$x_3 = -7 + x_0 + x_1 + x_2$$
$$x_4 = -13 + x_0 + 4x_1 + x_2$$
$$x_5 = -8 + x_0 + x_1 + 2x_2$$
$$w = -x_0$$

za vstopno spremenljivko vedno izberemo x_0. povečujemo x_0, dokler ne dobimo dopustnega slovarja. prva vrstica pove, da mora biti x_0 vsaj 7. druga, da mora biti x_0 vsaj 13, tretja 8.

torej izstopna spremenljivka je x_4 in $x_0 = 13$.

$$x_0 = 13 - 4x_1 - x_2 + x_4$$
$$x_3 = -7 + 13 - 4x_1 - x_2 + x_4 + x_1 + x_2 =$$
$$= 6 - 3x_1 + x_4$$
$$x_5 = -8 + 13 - 4x_1 - x_2 + x_4 + x_1 + 2x_2 =$$
$$= 5 - 3x_1 + x_2 + x_4$$
$$w = -13 + 4x_1 + x_2 - x_4$$

ta drugi slovar pa je vedno dopusten.

Če kadarkoli pridemo do nedopustnega slovarja, smo se zmotili, recimo izbrali napačno izstopno spremenljivko vzemimo vstopno spremenljivko x_2.

izstopna:

$$x_2 \le 13 \qquad x_2 \le \infty \qquad x_3 \le \infty \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

x_0 izstopna.

$$x_2 = 13 - x_0 - 4x_1 + x_4$$
$$x_3 = 6 - 3x_1 + x_4$$
$$x_5 = 5 - 3x_1 + (13 - x_0 - 4x_1 + x_4) + x_4 =$$
$$= 18 - x_0 - 7x_1 + 2x_4$$
$$w = -x_0$$

optimalna rešitev: $x_0 = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 13$

je ena dopustna rešitev prvotnega problema.

to je zadnji slovar prve faze. izbrišimo x_0 in dobimo prvi slovar druge faze

$$x_2 = 13 - 4x_1 + x_4$$
$$x_3 = 6 - 3x_1 + x_4$$
$$x_5 = 18 - 7x_1 + 2x_4$$

dopišemo z

$$z = -12x_1 - 10x_2 = -12x_1 - 10(13 - 4x_1 + x_4) =$$
$$= -130 + 28x_1 - 10x_4$$

je prvi slovar druge faze

vstopna: x_1

$x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$ | $x_1 \le \frac{13}{4}$, $x_1 \le 2$ ⟵ pivotna, $x_1 \le \frac{18}{7}$

$x_2 = 13 - 4\left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right) + x_4 = 5 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$

$x_5 = 18 - 7\left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right) + 2x_4 = 4 + \frac{7}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$

$z = -130 + 28\left(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right) - 10x_4 =$

$= -74 - \frac{28}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4$

končano, z ima le negativne koef. - zadnji slovar

$x_1^* = 2 \quad x_2^* = 5 \quad z^* = 74$

V prvi fazi:

- najdemo optimalno vrednost, ki je strogo manjša od 0, x_0 je še vedno bazna spremenljivka, potem prvotni je nedopusten.
- x_0 zapusti bazo, optimalna vrednost je 0, nadaljujemo z drugo fazo
- pridemo do zadnjega slovarja, optimalna vrednost je 0, toda x_0 je še vedno bazna spremenljivka.

Temu se izognemo tako, da če je x_0 kandidat za vstopno spremenljivko, jo vedno izberemo.

LP

$\forall i: b_i \geq 0$

dvofazna SX metoda

$\cancel{\forall i: b_i \geq 0}$

1. faza ima $w^* < 0$

nedopusten

1. faza ima $w^* = 0$

dopusten

v nekem trenutku ni kandidatov za izstopno spremenljivko

neomejen

pridemo do optimalne rešitve.