OMPFMF 2025-02-18

meta: obveznosti: • izpit (ki ga je možno opraviti s kolokviji)

• obvezna domača naloga

• ustni izpit 45 minut.

vsebina: linearno programiranje,

algoritmi na grafih,

matrične igre,

konveksno programiranje

[Optimizacijski problemi]

optimizacijski problem: radi bi našli $\overbrace{\text{max / min}}^{\text{optimum}}$ vrednost $\underbrace{\text{določene fje}}_{\text{kriterijska funkcija}}$ na $\underbrace{\text{neki množici}}_{\text{dopustna množica}}$.

dopustnih rešitev

↓

slika v $\mathbb{R}$

Primer:

(1) $f: [-1,2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 2x + 1$. najdi optimume: odvod, stac. tč, krajišča

(2) $f: [0,2] \times [1,4] \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5$

najdi optimume: parc. odv., stac. tč., parametrizacija roba

(3) kmetija · 50 ha zemlje

poljščine: pšenica, koruza, krompir

pridelek	delovna sila [človek·ura/ha]	stroški [€/ha]	dobiček [€/ha]
pšenica	60	400	240
koruza	80	600	400
krompir	100	480	320

na voljo 5000 človek ur, 24000 € kapitala, maksimiziramo dobiček

spremenljivke pšenica, koruza, krompir
x_1 x_2 x_3

$$\max \quad 240x_1 + 400x_2 + 320x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50$$
$$60x_1 + 80x_2 + 100x_3 \leq 5000$$
$$400x_1 + 600x_2 + 480x_3 \leq 24000$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

sledi, da je problem linearnega programa/optimizacije

(4) $2n$ jabolk, $w_1, \ldots, w_{2n}$ teže
razporedi v 2 košari, v vsako n jabolk, da je
razlika teži čim manjša

$$x_i \in \{-1, 1\} \quad \text{za} \quad i \in \{1..2n\}$$

v levi desni košari

$$\min \left| \sum_{i \in \{1..2n\}} w_i x_i \right| \quad \text{pp} \quad \sum_{i=1}^{2n} x_i = 0$$

ni linearen program

(5) 4 osebe: Ana, Barbara, Cvetka, Darja
želijo prečkati most, največ 2 naenkrat,
imajo le eno svetilko. različno hitre so:

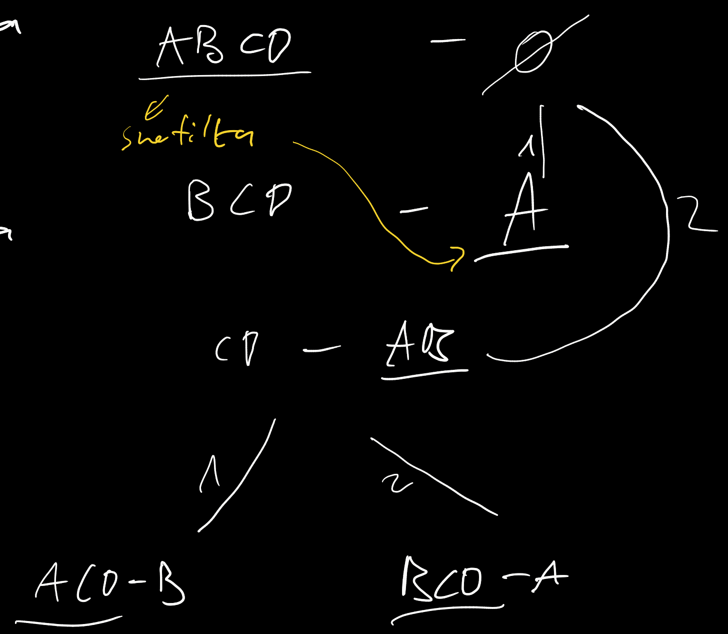
A 1 min
B 2 min
C 5 min
D 10 min

min čas, da vse prečkajo?

graf stanj:

$G = (V, E)$ V... možna stanja

utežen



povezave .. možnost prehoda med stanji

utež ... porabljen čas

iščemo najkrajšo pot od

ABCD – ∅ do ∅ – ABCD

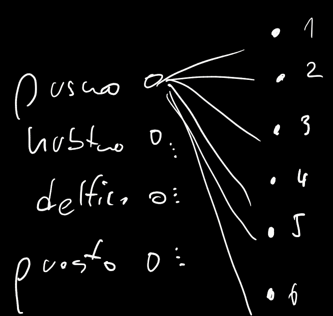
recimo dijkstra.

16) 6 plavalcev

	prsno	hrbtno	delfin	prosto
1	65	73	63	57
2	67	70	65	58
3	68	72	69	55
4	67	75	70	59
5	71	69	75	57
6	69	71	66	59

sestavimo čim hitrejšo štafeto.

$K_{4,6}$:



popolno prirejanje iz X v Y

vseh je $6^{\underline{4}}$ iščemo tisto z najmanjšo vsoto.

najcenejše popolno prirejanje

it X v y

problem rešimo z madžarsko metodo z utežmi

(7) problem potujočega trgovca

	LG	Lond	Madr	Pariz	Rim
Lj	0	5	10	5	10
Lo	5	0	10	1	5
Ma	10	10	0	5	5
Pa	5	1	5	0	1
Ri	10	5	5	1	0

it Lj
obišči vsa mesta in se vrni v Lj čim ceneje. vsako mesto obišči točno enkrat.

utežen poln graf. iščemo najcenejši hamiltonov cikel. uteži so cene.

ne obstaja učinkovit algoritem.

Def.: optimizacijski problem je trojica $(\max/\min, \underset{f}{\text{kriterijska funkcija}}, \overset{\Omega}{\text{dopustna množica}})$

cilj na funkcija — feasible set, množica dopustnih rešitev

iščemo optimalno rešitev $x^* \in \Omega$ $\exists : \forall x \in \Omega : f(x^*) \geq f(x)$ or $f(x^*) \leq f(x)$

optimalna vrednost je $f(x^*)$, tedaj je x^* optimalna rešitev

„reši optimizacijsko nalogo" $\sim$ „poišči optimalno rešitev" optimizacijski problemi

- nedopustni
  množica dopustnih rešitev je prazna.
  $(\max, x, x \leq 1 \wedge x \geq 2)$
- dopustni
  množica dopustnih rešitev ni prazna
  - neomejeni
    $(\max, x, x \geq 0)$
    f poljubno velike vrednosti
  - neoptimalen
    $(\max, x, x < 5)$
    ↳ stroga
    ni ustrezne rešitve in ni neomejen
  - optimalen
    ima rešitev
    $(\max, -x, x \geq 0)$ $x=0$

[linearno programiranje]

linearen program / LP je optimizacijski problem, pri katerem je f linearna fja, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ je podana z linearnimi enakostmi in neenakostmi oblike

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b \text{ ali}$$
$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \geq b \text{ ali}$$
$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

(ne pa tudi $<$ in $>$)

Rečemo, da je LP v standardni obliki, če

- iščemo maksimum
- Ω je podan s samimi $\leq$ (brez $=, \geq$)
- za vse spremenljivke velja, da so nenegativne.

$$\max \quad c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \qquad \forall i \in \{1..n\}: x_i \geq 0$$

pri pogojih
$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$
$$\dots$$
$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

tipično je natsimitacija dobička LP v standardni obliki.

simpleksna metoda deluje na LP v std obliki

Trditev: vsak LP je ekvivalenten nekemu LP v std. obliki

Dokaz: min $f \Rightarrow$ max $-f$ ohrani opt. rešitve

$\dots \geq \dots \xRightarrow{\cdot(-1)} -\dots \leq -\dots$

$\dots = \dots \Rightarrow \dots \geq \dots,\ \dots \geq \dots$

$$x_i \leq 0 \Rightarrow x_i' = -x_i,\ x_i' \geq 0$$

če je x_i lahko poz ali neg $\Rightarrow$ $x_i = x_i' - x_i''$ $x_i', x_i'' \geq 0$

primer: min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

pp

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 \geq 1$$
$$2x_2 + 5x_3 = -1$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_3 \leq 0$$

$x_3' := -x_3$

$x_2 = x_2' - x_2''$

$\Downarrow$

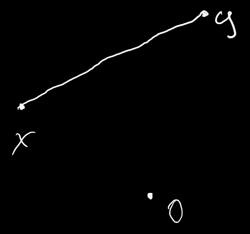
max $-2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + x_3'$

pp

$$x_1 + x_2' - x_2'' \leq 4$$
$$-3x_1 + x_2' - x_2'' - x_3' \leq -1$$
$$2x_2' - 2x_2'' + 5x_3' \leq -1$$
$$-2x_2' + 2x_2'' - 5x_3' \leq 1$$

$x_1, x_2', x_2'', x_3' \geq 0$

konveksna množica



$x+(y-x)\cdot\lambda$ je parametrizacija točk na xy premici

$(1-\lambda)x+\lambda y$.

za $\lambda\in[0,1]$ pa je to parametrizacija daljice xy

def.: $A\subset \boxed{\mathbb{R}^n}$ ali poljuben vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. je konveksna, če velja

$\forall a,b\in A,\ \lambda\in[0,1]:\ (1-\lambda)x+\lambda y\in A$

---

za $A\subseteq\mathbb{R}$ se izkaže, da je konveksna $\Leftrightarrow$ je interval.

krogla v $\mathbb{R}^n$ je konveksna

$\|x\|, \|y\|\le R$

$\|(1-\lambda)x+\lambda y\| \le \|(1-\lambda)x\|+\|\lambda y\| = |1-\lambda|\,\|x\|+|\lambda|\,\|y\| =$

$= (1-\lambda)\underbrace{\|x\|}_{\le R} - \lambda\underbrace{\|y\|}_{\le R} \le R$

premica v $\mathbb{R}^n$ je konveksna
ravnina v $\mathbb{R}^n$ je konveksna
kocka v $\mathbb{R}^n$ je konveksna
vsak linearen podprostor v $\mathbb{R}^n$ je konveksen.

če je x,y v V, je $\lambda x+\mu y\in V$, torej tudi za $\lambda\in[0,1]$ in $\mu=1-\lambda$.

$a+V$ je tudi konveksna za V podprostor (D.N.)

polprostor je tudi konveksen.

Dokaz:

I $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b$

II $a_1 y_1 + \dots + a_n y_n \leq b$

$a_1((1-\lambda)x_1 + \lambda y_1) + \dots + a_n((1-\lambda)x_n + \lambda y_n) \leq b$

dobimo z $\underbrace{(1-\lambda)\mathrm{I} + \lambda\mathrm{II}}$ nenegativno

Opomba: $\lambda x + \mu y$ — $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ linearna kombinacija

$\lambda x + \mu y$ ob $x + y = 1$ — $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ ob $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ afina kombinacija

$\lambda x + \mu y$ ob $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ — $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ ob $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ konveksna kombinacija

$\lambda x + \mu y$ ob $\lambda, \mu \geq 0$ — $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ ob $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ nenegativna kombinacija

Trditev

za A, B konveksni je $A \cap B$ konveksna

za $\{A_i ; i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ konveksne $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ konveksna

Dokaz: $x, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$; $\lambda \in [0,1]$

$\forall i \in I$: $(1-\lambda)\underset{\in A_i}{x} + \lambda \underset{\in A_i}{y} \in A_i \rightarrow A_i$ konveksna

unija pa ni nujno konveksna

Trditev: let P LP. velja Ω konveksna in

$\text{opt} = \{x^* : x^* \text{ optimalna rešitev}\}$ konveksna.

Dokaz: Ω je presek polprostorov, torej je konveksen.

switch

case $\text{opt} = \emptyset$: ✓

case $\text{opt} \neq \emptyset$: $\exists x^* \in \text{opt} \ni$: $\text{opt} = \{x \in \Omega ; f(x) = f(x^*)\}$

$$= \underbrace{\Omega}_{\text{konveksna}} \cap \underbrace{\{x ; f(x) = f(x^*)\}}_{\text{hiperravnina}}$$

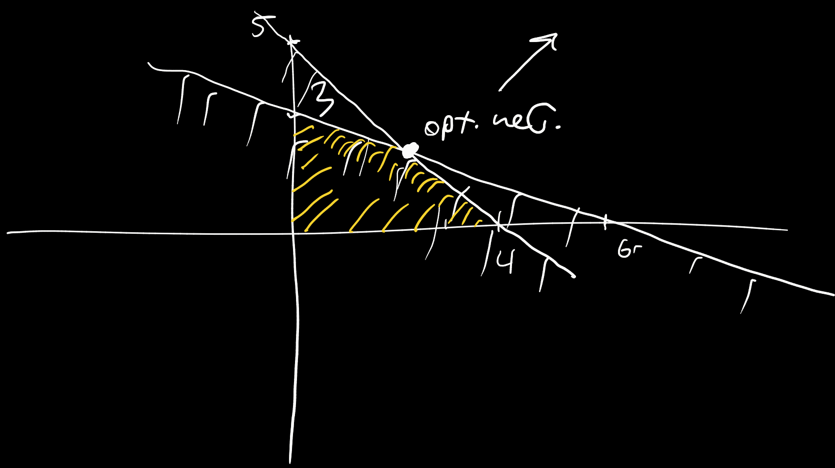
Grafično reševanje LP z dvema spremenljivkama

$\max \ x + y$

pp $x + 2y \leq 6$

$5x + 4y \leq 20$

$x, y \geq 0$



$x + 2y = 6$

$5x + 4y = 20$

$3x = 8 \quad x = \frac{8}{3}$

$y = \frac{6 - \frac{8}{3}}{2} = \frac{5}{3}$

$x^* = 8/3 \quad y^* = 5/3$

$f(x^*, y^*) = \frac{13}{3}$