

NUMPFMF2026-01-16

Zamudil prvo avo.

na drugi uvi ne sedim,
ker se vada lufe et dolg
dotaz iz prve /:

stiskanje slit s SVD (se ne uporablja):

$$A = \begin{matrix} \boxed{\text{foto}} \end{matrix} \leftarrow \{0..255\}^{m \times n} \quad m \geq n$$

$\text{rang}(A) = n$ ali blizu tega

iščemo aproksimacijo A_k , ki zahteva manj
podatkov.

$$A = \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^T$$

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$$

$$k \ll n$$

Kaj pa, če rang ni poln? Pseudolazni sistemi
+ defektni / nepolni rangem.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rang } A = r < n$. ni enoličnega minimuma.

Tuditev: če je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rang } A = r < n$. in

$A = U \Sigma V^T$ SVD, ima vedno več vektorji, ki minimizirajo
 $\|Ax - b\|_2$, najmanjšo normo ravno $x = \underbrace{A^+}_{\text{pseudoinverz}} b$, atično

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i, \quad \|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=r+1}^n (u_i^T b)^2$$

Dokaz: $x \in \mathbb{R}^n$; $\|Ax - b\|_2^2 = \|U \Sigma V^T x - b\|_2^2 =$

$$= \|\Sigma V^T x - U^T b\|_2^2 = \sum_{i=1}^r (\sigma_i a_i - u_i^T b)^2 + \sum_{i=r+1}^n (u_i^T b)^2$$

min je dosežen, če je $\sigma_i a_i - u_i^T b = 0 \quad \forall i \in \{1..r\}$

$$\Rightarrow a_i = \frac{u_i^T b}{\sigma_i} \quad \text{ker je } V^T x = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = Va \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i + \sum_{i=n+1}^n \alpha_i v_i$$

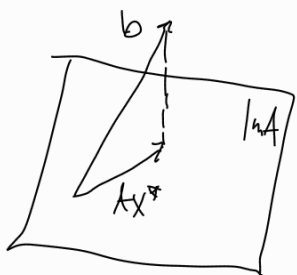
zakaj ima x min 2. navedeno? $\|y\|_2^2 = \|Va\|_2^2 = \|a\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 =$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + \sum_{i=n+1}^n \alpha_i^2 \quad \text{min je dosegeno, če je } \alpha_{n+1} = \dots = \alpha_n = 0$$

[problem totalnih najmanjših kvadratov]

Klasičen problem najmanjših kvadratov.

$$\min_x \|Ax - b\|_2, \quad \text{rang } A = n$$



je sistem ozvrščeno z

$$r = Ax - b \Rightarrow Ax = b + r \Rightarrow b + r \in \text{Im } A$$

Iščemo torej $\tilde{b} \in \text{Im } A$ s $\|\tilde{b} - b\|_2$ je minimalno. $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$

če so razpade tudi v matriki A , potem je bolj smiselno poiskati $\tilde{A}$ in $\tilde{b}$, $\tilde{b} \in \text{Im } \tilde{A}$

terto, da je $\|[\tilde{A}, \tilde{b}] - [A, b]\|_F$ minimalno.

Pojita van da $\text{SVD } [A, b]$

Recimo, da $b \notin \text{Im } A \Rightarrow \text{rang } [A, b] = n + 1$.

$$\text{Iz } \tilde{b} \in \text{Im } \tilde{A} \text{ sledi } \text{rang } [\tilde{A}, \tilde{b}] = n. \text{ Let } [A, b] = U \Sigma V^T, \quad \sigma_n \geq \sigma_{n+1} > 0$$

Izrek (Eckart-Young-Mirsky)

medlej rang n , ki v $\| \cdot \|_F$ najbolj aproksimira

$$[A, b], \text{ je } [\tilde{A}, \tilde{b}] = [A, b] - \sigma_{n+1} u_{n+1} v_{n+1}^T$$

$$\text{Ker je } [\tilde{A}, \tilde{b}] v_{n+1} = (U \Sigma V^T) v_{n+1} - \sigma_{n+1} u_{n+1} \overbrace{v_{n+1}^T v_{n+1}}^1 =$$

$$= (U \Sigma V^T) v_{n+1} - \sigma_{n+1} u_{n+1} = U \Sigma (V^T v_{n+1}) - \sigma_{n+1} u_{n+1} =$$

$$= \sigma_{n+1} u_{n+1} \cdot 1 - \sigma_{n+1} u_{n+1} = 0 \quad \text{Torej je}$$

$$V_{n+1} \in \ker[\tilde{A} \ \tilde{b}] \quad \text{toda} \quad \dim[\tilde{A}, \tilde{b}] = n+1, \quad \text{rang}[\tilde{A}, \tilde{b}] = n,$$

$$\text{toda} \quad \dim \ker[\tilde{A}, \tilde{b}] = 1, \quad \text{toda} \quad \ker[\tilde{A}, \tilde{b}] = \text{Lin}\{V_{n+1}\}$$

$$\text{je } \tilde{x} \text{ vektor } \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}, \text{ je } [\tilde{A} \ \tilde{b}] \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ -1 \end{bmatrix} \in \ker[\tilde{A} \ \tilde{b}] = \text{Lin}\{V_{n+1}\}.$$

$$\text{toda} \quad \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha V_{n+1} \quad \text{za nekakšnji skalar } \alpha.$$

$$-1 = \alpha (V_{n+1})_{n+1} \Rightarrow \alpha$$

$$\tilde{x} = \alpha V_{n+1}(1:n)$$

Primer: iščemo pomenko $y = -4$, ki najbolje
aproximira

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1,5 & 0,2 & 0,5 & -2,3 & -1,5 \end{array}$$

- po metodi najmanjših kvadratov
- po metodi totalnih min. kvadr.