

VUMPAH 2026-01-09

zamudil 15 minut. detali su
malce podrobneje, a se bistveno,
isto kot pri vajah 0108.

nato smo pokazali Ge eu primer: začetna
faza modeliranja Covid otužb.

t_i	1	2	3	4	...	10	v dveh
f_i	1	2	8	12	...	141	

$$f(t) = ae^{bt} \dots \text{linearni fit } a, b !!!$$

$$\log f(t) = \log a + bt = A + bt \xRightarrow{\text{ne točno uveljavljamo}} A, b \rightarrow \begin{matrix} a = e^A \\ b = b \end{matrix}$$

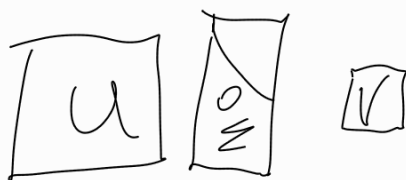
[SVD]

"posplošitev diagonalizacije / PPP⁻¹".

let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $m \geq n$.

Trdimo, da $\exists$ matrike $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
 $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\exists$: $A = U \Sigma V^T$

tj. sta U in V ortogonalni in
 Σ tuži diagonalna.



toda $U \neq V$, zato
to pri $m=n$ ni
diagonalizacija.

SVD je diagonalizacija nkeza simetrične matrike.

Trditev: SVD vedno obstaja. (Stu, stolpecu U pravimo
levi, stolpecu V pa desni lave)

Pokaži oglejmo si $A^T A$ (pozitivno semidefinitna in simetrična).
morej obstajajo lavr $\sigma_i^2 \geq 0$ in avtorovni lave

(σ_i) so pozitivni $\sqrt{\sigma_i^2}$
od $(\sigma_i^2)_i$.

$$A^T A V_i = \sigma_i^2 V_i ; i \in 1, 2, \dots, n$$

rje rang matrike, se izkaže.

let $\sigma_r > 0$ in $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$, $r \leq n$.

otnačimo $V_1 = [V_1 \dots V_r]$, $V_2 = [V_{r+1}, \dots, V_n]$

$$(AV_2)^T(AV_2) = V_2^T A^T A V_2 = V_2^T \cdot 0 = 0 \rightarrow AV_2 = 0.$$

otnačimo $U_i = \frac{1}{\sigma_i} AV_i$; $i=1, 2, \dots, r$

U_i so ortonormirani, kar pomeni $U_j^T U_i = \left(\frac{1}{\sigma_j} AV_j\right)^T \frac{1}{\sigma_i} AV_i$

$$= \frac{1}{\sigma_j \sigma_i} V_j^T A^T A V_i = \frac{1}{\sigma_j \sigma_i} V_j^T \Sigma^2 V_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_j \sigma_i} V_j^T V_i = \begin{cases} \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i \sigma_i} \cdot 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

otnačimo $U_1 = [U_1 U_2 \dots U_r]$.

$$= \delta_{ij}$$

lahko izberemo $U_2 = [U_{r+1}, U_{r+2}, \dots, U_m]$ tako, da je $V = [U_1 U_2]$ ortogonalna (gram-schmidt)

kar $V^T A V = [U_1 U_2]^T A [V_1 V_2]$ in določi

$$V^T A V = \begin{bmatrix} U_1^T A V_1 & U_1^T A V_2 \\ U_2^T A V_1 & U_2^T A V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_2^T A V_1 = [U_{r+1}, \dots, U_m]^T A [V_1, V_2, \dots, V_r]$$

...

Lemma: Če je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(A) = r$, je $\min \|Ax - b\|_2$ dosegel pri $x = \sum_{i=1}^r \frac{U_i^T b}{\sigma_i} U_i$.

Dokaz: let $A = U \Sigma V^T$ in $U = [U_1 U_2]$, $\Sigma = \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$

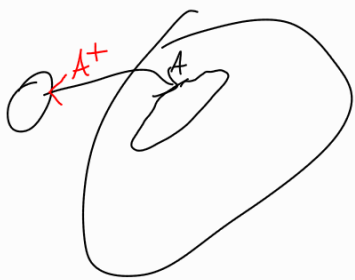
tedaj $\|Ax - b\|_2 = \|U \Sigma V^T x - b\|_2^2 = \dots = S V^T x = r_1^T b$

$$x = V(S^{-1} U_1^T b) = \sum_{i=1}^r \frac{U_i^T b}{\sigma_i} U_i$$

[Pseudoinverse]

ata Moore-Penrozeov pseudoinverz.

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}; \quad m \geq n$$



Def.: za matrico $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rang}(A) = n$ (poln rang)
definiramo pseudoinverz $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ kot $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

za primer $m < n$ in $\text{rang}(A) = m$ je $A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$

Def.: Matrica $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je pseudoinverz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, če izpolnjuje Moore-Penrozeove pogoje

- 1.) $A X A = A$
- 2.) $X A X = X$
- 3.) $(A X)^T = A X$
- 4.) $(X A)^T = X A$

Izvet.: let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rang}(A) = r \leq n$ in $A = U \Sigma V^T$,
kjer je $U = [U_1, U_2]$, $V = [V_1, V_2]$, $\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$S = \text{diag}(\sigma_i)_{i=1}^r$$

Pseudoinverz matrice A je enoličen in je enat

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} S^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oblik.: Pseudoinverz A^+ je enat velikosti $n \times m$, zato ga lahko pišemo kot $A^+ = U Y U^T$, kjer $Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$

$$\text{ogledamo si } A A^+ = (U \Sigma V^T) (U Y U^T) =$$

$$= U \Sigma Y U^T = U \begin{bmatrix} S Y_{11} & S Y_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T. \text{ Po 3.) je } A A^+ = (A A^+)^T, \text{ o}$$

kar sledi $Y_{12} = 0$. Podobno iz 4.) dobimo $Y_{21} = 0$.

$$\text{Iz 2.) sledi: } A^+ A A^+ = A^+, \text{ torej } \begin{bmatrix} Y_{11} S Y_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{bmatrix},$$

torej je $Y_{22} = 0$. Iz 1.) dobimo $A A^+ A = A$, torej potencialen

$$S Y_{11} S = S \quad \text{ } \cdot S^{-1} \Rightarrow Y_{11} = S^{-1}$$

