NUMPFMF 2025-12-19

$Ax=b$ $\qquad x^* = \arg\min \|Ax-b\|_2$

rang $A = n$

(1.) normalni sistem: $A^TAx = A^Tb$

(2.) QR razcep

↳ 2.1. standardni – Gram-Schmidt

- standardni: v takih vsakokrat uporabljamo sveže vektorje iz $A$
- modificirani: v takih uporabljamo že izračunane vektorje iz $Q$.

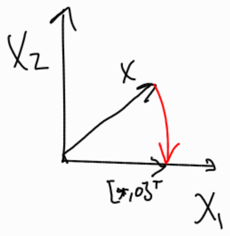
↳ 2.2. razširjeni

↳ givensove rotacije

↳ householderjeva zrcaljenja

$$R_{12}^T A = \begin{bmatrix} * & \\ 0 & \\ * & \\ \vdots & * \\ * & \end{bmatrix} \qquad R_{13}^T R_{12}^T A = \begin{bmatrix} * & \\ 0 & \\ 0 & \\ * & \\ \vdots & * \\ * & \end{bmatrix} \qquad \cdots$$

v 2D: $x \in \mathbb{R}^2$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \tilde{x} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$




$$R_{12}^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

v več dimenzijah:

$$R_{ij}^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos\varphi & \cdots & \sin\varphi & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & -\sin\varphi & \cdots & \cos\varphi & \\ 0 & & & & & & 1 \ddots 1 \end{bmatrix}$$

Postopek: $\underbrace{R_{n-1,m}^T \cdots R_{13}^T R_{12}^T}_{Q^T \text{ ... ortogonalna}} A = R = \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{bmatrix}$

$$Q^TA = R$$

$$A = QR$$

$$Q = R_{12}R_{13}\cdots R_{n-1,m}$$

householderjeva zrcaljenja

$\Sigma$ hiperravnina ••• nisem poslušal.

Primeri: $a = [1\ 2\ 2]^T$ •••

Postopek za QR razcep s HH zrcaljenji:

$A = A_1 = [a_1 \cdots a_n]$

$\downarrow$

$w_1$

$$\Rightarrow P_1A = P_1A_1 = \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & & \\ \vdots & A_2 & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$P_1$ ... fak sploh se ne morm skoncentrirat...

Primer: s pomočjo QR razcepa rešite sistem s hausholderjem

$$2x+2y+6z=6$$
$$2x+y-2z=-1$$
$$x+6y-2z=-7$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \;;\quad b=\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

norma

$$P_1 = I - \frac{2}{w_1^T w_1} w_1 w_1^T \;;\quad w_1 = \begin{bmatrix} 2+3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 A = \begin{bmatrix} P_1 a_1 & P_1 a_2 & P_1 a_3 \end{bmatrix}$$

torej za $i=1,2,3$:

$$\left(I - \frac{2}{w_1^T w_1} w_1 w_1^T\right) a_i = a_i - \frac{2}{w_1^T w_1} w_1 \left(w_1^T a_i\right)$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{2}{30}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} 18 = \begin{bmatrix} -4 \\ -7/5 \\ 24/5 \end{bmatrix} \;;\quad a_3 = \begin{bmatrix} -10/5 \\ -26/5 \\ -18/5 \end{bmatrix}$$

$$P_1 b = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} - \frac{2}{30}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 21 = \begin{bmatrix} -1 \\ -19/5 \\ -42/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & -7/5 & -26/5 \\ 0 & 24/5 & -18/5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 \\ -19/5 \\ -42/5 \end{bmatrix}$$

2. korak in dobimo

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad x_3=1 \quad x_2=-1 \quad x_1=1$$