NUMPFMF 2025-11-28

[Simetrične pozitivno definitne matrike (s.p.d.)]

Def.: Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je s.p.d., če je $A = A^T$ in

$\forall x \neq 0: \ x^T A x > 0$

Lastnosti:

- Let C obrnljiva. A s.p.d. $\Leftrightarrow C^T A C$ s.p.d.
- Vse vodilne podmatrike s.p.d. A so s.p.d.
- Let A s.p.d. tedaj je $H = A([i_1, \dots, i_k], [i_1, \dots, i_k])$ s.p.d.
- Če je A s.p.d., so vse lastne pozitivne. (implikacija)

  Dokaz: Let (λ, v) lastni par; $\lambda \in \mathbb{R}$, ker $A = A^T$.

  $v \neq 0$ po def.; po definiciji velja $v^T A v > 0$.

  $$v^T A v = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2 > 0$$

  $$\Rightarrow \lambda > 0.$$

- Če je A s.p.d., potem obstaja LU razcep brez pivotiranja in $u_{ii} > 0$.

Izrek: Matrika A je s.p.d. natanko tedaj, ko obstaja taka nesingularna spodnja trikotna matrika V s pozitivnimi diag. elementi, da velja $A = V V^T$ (razcep Choleskega)

Dokaz: $(\Leftarrow)$ $A = VV^T \Rightarrow A^T = (VV^T)^T = V^{T^T} V^T = VV^T = A$

Izberemo poljuben $x \neq 0$. $\underline{x^T A x > 0}$

$$x^T A x = x^T V V^T x = (x^T V)(V^T x) = (V^T x)^T (V^T x) =$$

$$= \|V^T x\|^2 \overset{\text{def. norme}}{\geq} 0$$

če bi $\|V^T x\|$ bilo 0, bi $V^T x$ bil 0 in tedaj bi V^T bila nesingularna, saj je $x \neq 0$, torej bi V bila nesingularna $*$.

$(\Rightarrow)$ Vemo, da $\exists$ LU razcep brez pivotiranja in $u_{ii} > 0$.

torej $A = LU$; $\quad V = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} \cdots & u_{2n} \\ 0 & \ddots & u_{nn} \end{bmatrix}$ > 0

$A = L \cdot \overbrace{D \cdot M}^{U}$, $\quad D = \begin{bmatrix} u_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$, $\quad M = \begin{bmatrix} \frac{u_{11}}{u_{11}} & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ 0 & \frac{u_{22}}{u_{22}} & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \frac{u_{nn}}{u_{nn}} \end{bmatrix}$.

Ker je $A=A^T$, je $A=A^T = LDM = M^T(\underbrace{D^T}_{D^T = D \text{ diag}} L^T) =$

$= \underbrace{M^T}_{\text{sp3k z ones na diag}} \underbrace{(DL^T)}_{\text{zg3k}}$

zg3k z ones na diag

torej je to LU razcep. Ker je LU razcep enoličen mora biti $L=M^T$ (in $U=DL^T$).

torej $A = LDL^T$ in zato $V = L\cdot D^{\frac{1}{2}}$ → operacija dovoljena, ker so diagonalci >0

V: sp3k matrika s poz. elem. na diag.

□

Izpeljava Algoritma: $A = VV^T$; $V = \begin{bmatrix} v_{11} & & & 0 \\ v_{21} & v_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$

Računamo stolpce V zaporedoma.

$$VV^T = \begin{bmatrix} v_{11} & & 0 \\ v_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & v_{nn} \end{bmatrix}$$

1. stolpec:

$$V\cdot\begin{bmatrix} v_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11}\cdot v_{11} \\ v_{21}\cdot v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1}\cdot v_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

$v_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow v_{11} = \pm\sqrt{a_{11}}$

izberemo $+\sqrt{a_{11}}$

spd. matrika ima nujno diagonalce >0:

$e_i^T A e_i > 0$ → def. spd

$a_{ii} > 0$

$v_{11}\cdot v_{j1} = a_{j1}$ za $j \in \{2..n\}$

$v_{j1} = a_{j1}/v_{11}$

izračunali smo 1. stolpec

stolpci $\{2..n\}$ induktivno: recimo, da smo že izračunal. prvih $j-1$ stolpcev matrike V. Kako izračunati j-tega?

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = V\cdot\begin{bmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \\ \vdots \\ v_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = v_{j1}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + v_{j2}\begin{bmatrix} 0 \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix} + \dots + v_{jj}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{jj} \\ v_{j+1,j} \\ \vdots \\ v_{n,j} \end{bmatrix}$$

$$a_{jj} = \overbrace{v_{j1}^2 + v_{j2}^2 + \dots + v_{jj-1}^2}^{\text{izračunani že poprej}} + v_{jj}^2$$

$$v_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{jk}^2}$$

$i > j$: $a_{ij} = v_{i1}v_{j1} + v_{i2}v_{j2} + \dots + v_{ij}v_{jj}$

$$v_{ij} = \frac{1}{v_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{ik}v_{jk}\right)$$

Algoritem Razcep Choleskega:

for $j = 1:n$:

  $v_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{jk}^2}$

  for $i = j+1:n$:

    $v_{ij} = \frac{1}{v_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{ik}v_{jk}\right)$

št. operacij: $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$

Je tudi uporaben algoritem za preverbo spd.

če ni, bi med postopkom korenili neg. el.

kaj pa pivotiranje ?? smiselno je edino diagonalno pivotiranje, da ohranjamo simetričnost: na vsakem koraku poiščemo največji element (po absolutni vrednosti) na preostanku diagonale in (so itak >0) zamenjamo stolpca in vrstici.

v praksi se ne pivotira.

[SISTEMI NELINEARNIH ENAČB]

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)&=0\\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)&=0\\ &\dots\\ f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)&=0 \end{aligned} \quad \sim$$

Vsaj ena fja f_i je nelinearna

$$F=[f_1,f_2,\dots,f_n]^T,\quad X=[x_1,x_2,\dots,x_n]^T$$

$$F(X)=0$$

navadna iteracija: pretvorimo iskanje rešitve na iskanje negibne točke.

$$F(x)=0 \Leftrightarrow X=G(X)$$

tvorimo $X^{(k+1)}=G(X^{(k)})$; $X^{(0)}$ izberemo

$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$; $G:\Omega\to\Omega$

↳ za Ω polni prostor.

kako nastaviti G, da bo skrčitev? težko.

Izrek: let $G:\Omega\to\mathbb{R}^n$ preslikava, za katero je

1.) $X\in\Omega \Rightarrow G(X)\in\Omega$

2.) G je skrčitev; $\forall x,y\in\Omega: \|G(x)-G(y)\|\leq q\|x-y\|$; $0<q<1$

Tedaj zaporedje $(X^{(k)})_{k=1}^{\infty}$: $X^{(k+1)}=G(X^{(k)})$ konvergira proti negibni točki $\alpha\in\Omega$; $\alpha=G(\alpha)$, ki je rešitev sistema $F(x)=0$, za $\forall x^{(0)}\in\Omega$.

Posledica: G je skrčitev, če je Jacobijeva matrika

$$\rho(J_G(x))<1 \quad \forall x\in\Omega.$$

↑ spektralni radij: $\max\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_n|\}$

$$J_G(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x)\\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x)\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}$$

Posplošitev Newtnove metode:

$$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{g(x_n)}$$

$\frac{a}{b} = ab^{-1} = b^{-1}a$

posplošimo; izkaže se. splošen dokaz izpustimo

$$G(x) = x - J_F^{-1}(x)\cdot F(x)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}\left(x^{(k)}\right) F\left(x^{(k)}\right) \quad ; \quad k = 0, 1, \dots$$

$x^{(0)}$ izberemo

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = -J_F^{-1}\left(x^{(k)}\right) F\left(x^{(k)}\right) \quad / \cdot J_F\left(x^{(k)}\right)$$

z leve

$$J_F\left(x^{(k)}\right)\underbrace{\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right)}_{\text{pišemo } \Delta x^{(k)}} = -F\left(x^{(k)}\right)$$

$$J_F\left(x^{(k)}\right)\Delta x^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right)$$

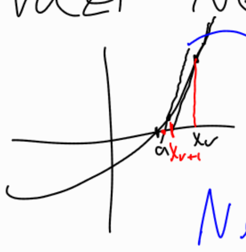
$$Ax = b$$

Kdaj ustavimo? recimo ko je $\|\Delta x^{(k)}\| < \varepsilon$.

Izrek: (Kantorovič) zagotavlja konvergenco ob relativno zapletenih pogojih. Ne bomo omenjali tega težkega izreka. Izkaže se, da je konvergenca kvadratična.

J_F je težko numerično. Kako se temu izogniti?

Kvazi-Newtnova metoda.



uporabimo isti odvod / J_F kot prejšnjo iteracijo za ceno hitrosti konvergence.

Ne računamo $J_F(x^{(k)})$ na vsakem koraku, ampak samo na vsakih nekaj korakih.

Kako je z izbiro začetnega približka?

težko.

Primer: Reševanje: $z^3+1=0$, $\quad z\in\mathbb{C}$.

$z = x+iy$ za $x,y\in\mathbb{R}$

$$z^3+1 = x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3+1=0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}(z^3+1) &= x^3-3xy^2+1=0 \\ \mathrm{Im}(z^3+1) &= 3x^2y-y^3=0 \end{aligned}}$$

sist. 2 nelin. enačb z 2 neznankama.