NUMPFMF2025-11-14

$Ax=b$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\det A\neq 0$.

radi bi našli x za dana A in b.

→ če poznamo A^{-1}; $x=A^{-1}b$, toda iskanje inverzov matrik je težko.

→ [LU razcep] → $O(n^3)$ se izkaže

Ideja: $A=L\cdot U$; $L=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ * & & 1\end{bmatrix}$, $U=\begin{bmatrix}\ddots & *\\ 0 & \ddots\end{bmatrix}$

↳ izkaže se, da morajo biti ti diagonalci zaradi multiplikativnosti det neničelni.

$$Ax=b$$
$$(LU)x=b$$
$$L(Ux)=b$$

označimo novo neznanko $Ux=y$

znano $Ly=b$ ... rešimo v $O(n^2)$ z direktnim vstavljanjem.

znano $Ux=y$ ... rešimo v $O(n^2)$ z obratnim vstavljanjem.

Kako pa narediti $A=L\cdot U$? A je to sploh vedno možno? Izkaže se, da ne obstaja vedno $A=LU$ razcep, četudi je $\det A\neq 0$.

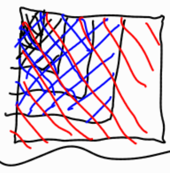
Dokaz: $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\a&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b&c\\0&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&c\\ab&ac+d\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow 0=b \Rightarrow ab=0 \Rightarrow 1=0 \quad \text{↯}$$

Lema: let $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\det A\neq 0$ zdB A je nesingularna. Če so vsi glavni minorji matrike A različni od 0, obstaja enoličen LU razcep. Velja tudi obratno.

vsi glavni minorji A so različni od 0 $\iff \det(A(1:k,1:k))\neq 0 \ \forall k\in[n]$

glavni minorji so determinante glavnih podmatrik:



Dokaz: ($\Leftarrow$) Recimo, da $A=L\cdot U$ razcep obstaja:

$$\begin{bmatrix}A_k & \\ & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_k & 0\\ * & I\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}U_k & \\ 0 & \end{bmatrix}\Rightarrow A_k=L_kU_k$$

$$\det A_k=\det L_k \det U_k = 1\cdot\prod_{j=1}^{k} u_{jj}\neq 0$$

($\Longrightarrow$) z indukcijo na n:

baza $n=1$: $A = [a_{11}]$ $\quad \det A \neq 0 \Leftrightarrow a_{11} \neq 0$

$= [1] \cdot [a_{11}]$

korak $n \to n+1$: I.P.: Če ima $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vse glavne minorje neničelne, ima LU razcep.

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_n & a \\ \hline b^T & a_{n+1,n+1} \end{array}\right] =$$

Ker ima A po predp. vse glavne minorje $\neq 0$, jih ima tudi A_n, zato $A_n = L_n \cdot U_n$

postavimo

$$= \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} L_n & 0 \\ \hline l^T & 1 \end{array}\right]}_{L:} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} U_n & u \\ \hline 0 & \alpha \end{array}\right]}_{U:}$$

Preverimo, da ta produkt poda A na enoličen način, t.j. da so l, u, α enolični:

$l^T U_n = b^T \qquad l^T u + \alpha = a_{n+1,n+1}$

$L_n \cdot u = a$ ker je L_n spodnjetrikotna matrika in a znani vektor, lahko z direktnim vstavljanjem enolično (ker je L_n obrnljiva) dobimo u.

$U_n^T l = b$ $\quad$ l dobimo z direktnim vstavljanjem enolično

$\alpha = a_{n+1,n+1} - l^T u$ $\quad$ enolično dobimo α, ko imamo l in u.

$\square$ lema dokazana

Kako pa razcep dobimo?

[Elementarne eliminacije]

Primer: $x = [1, 2, 4, -8, 6, 1]^T$ $\quad$ Iščemo „preprosto" matriko L_3 tako, da bo imel vektor $L_3 x$ ničle na mestih 4, 5, 6 ker element na mestu 3 različen od 0.

$$l_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8/4 \\ 6/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \qquad L_3 = I_6 - l_3 e_3^T = I_6 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 3/2 \\ 1/4 \end{bmatrix} [0\,0\,1\,0\,0\,0] =$$

$$= I_6 - \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&-2&0&0&0 \\ 0&0&3/2&0&0&0 \\ 0&0&1/4&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&2&1&0&0 \\ 0&0&-3/2&0&1&0 \\ 0&0&-1/4&0&0&1 \end{bmatrix} \quad ; \quad L_3 x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L_1 dela tudi na matrikah:

$$L_1 \begin{bmatrix} * & \\ * & \\ * & * \\ \vdots & \\ * & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{bmatrix}$$

in lahko na matriki tudi več L_i-jev apliciramo in ne interaktajo medsebojno, torej jih mnogo množimo z leve in dobimo zgornjetrikotno na 3ko.

Splošno: $x = [x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n]^T$ in $x_k \neq 0$.

iščemo l_k tako, da je $L_k x = (I_n - l_k e_k^T)\, x = [\underbrace{\overset{k\text{-elem.}}{\overbrace{*,\dots,*}}}_{\neq 0}, 0, \dots, 0]^T$

$$l_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1}/x_k \\ x_{k+2}/x_k \\ \vdots \\ x_n/x_k \end{bmatrix} \qquad L_k = I_n - l_k e_k^T = \dots$$

Doma preverite: $L_k x = [*, \dots, *, 0, \dots, 0]^T$

nekaj lastnosti matrik L_k:

1. L_k je spodnje trikotna
2. $L_k^{-1} = I_n + l_k e_k^T$

$$\begin{array}{c} k \\ \downarrow \end{array} \quad [0,\dots,0,1,0,\dots,0] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{k+1}/x_k \\ \vdots \\ x_n/x_k \end{bmatrix} = 0$$

Račun: $L_k L_k^{-1} = (I_n - l_k e_k^T)(I_n + l_k e_k^T) =$

$= I_n - \cancel{l_k e_k^T} + \cancel{l_k e_k^T} - l_k e_k^T l_k e_k^T = I_n - \cancel{l_k (e_k^T l_k) e_k^T} = I_n$

mi bomo U dobili tako, da $L_n \cdots L_2 L_1 A = U$.
to je še treba dokazati. nato bo veljalo $A = \underbrace{L_1^{-1} \cdots L_n^{-1}}_{L} U$.
treba je še dokazati, da je tako dobljeni L tudi sam spodnje trikotna matrika.

3. za $i<j$ $L_i^{-1} L_j^{-1} = (I_n + l_i e_i^T)(I_n + l_j e_j^T) =$

$= I_n + l_i e_i^T + l_j e_j^T + \cancel{l_i (e_i^T l_j) e_j^T} = I_n + l_i e_i^T + l_j e_j^T =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & l_{i,i+1} & \ddots & & & \\ & & l_{i,i+2} & & 1 & & \\ & & \vdots & & l_{j,j+1} & \ddots & \\ & & l_{in} & & l_{jn} & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\quad\uparrow_i \; < \; \uparrow_j$$

Iz 3. sledi, da je $L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots \underbrace{L_n^{-1}}_{} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ x[2:n] & 1 & & & \\ & l_2[3:n] & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & l_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

v bistvu je to že identiteta, ker je $l_n = \vec{0}$

Kako izvedemo LU razcep z elementarnimi eliminacijami?

1. korak: poiščemo L_1 tako, da v prvem stolpcu A postavimo elemente od 2. do n-tega na 0.

Torej $L_1 = I_n - l_1 e_1^T$, kjer vemo, da mora l_1 biti $\begin{bmatrix} 0 \\ a_{21}/a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1}/a_{11} \end{bmatrix}$.

$$L_1 A = (I_n - l_1 e_1^T)A = \left(I_n - \begin{bmatrix} 0 \\ l_{21} \\ \vdots \\ l_{n1} \end{bmatrix} [1\ 0 \cdots 0]\right) A =$$

$$= A - \hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12}\ a_{13} \cdots a_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & a_{ij}^{(1)} \\ 0 & \end{array}\right]$$ kjer so $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - l_{i1} a_{ij}$

2. korak: poiščemo elementarno eliminacijo L_2, s katero „uničimo" vse elemente v 2. stolpcu $L_1 A$ pod diagonalo.

Primer:

a tu bi sicer pisali 0, a v mesta 0 pišemo L (koeficiente)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 8 & 10 \\ 1 & 6 & 9 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{III = III - I \cdot 3/1 \\ IV = IV - I \cdot 1/1}]{\substack{I = I \\ II = II - I \cdot 2/1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2/1 & 2 & 2 & 1 \\ 3/1 & 4 & 5 & 4 \\ 1/1 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

dokončni

dokončni

nedokončni

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[LU razcep z delnim pivotiranjem]

Let A nesingularna:

Oglejmo si primer matrike, ki nima vseh glavnih minorjev neničelnih:

$$A = \left[\begin{array}{cc} 0 & \\ * & \\ \vdots & * \\ * & \end{array}\right] \xrightarrow{\text{menjava vrstic}} \left[\begin{array}{cc} * & \\ \vdots & \\ * & \\ 0 & * \\ * & \\ \vdots & \\ * & \end{array}\right]$$

gotovo ∃ en neničeln, ker $\det A \neq 0$.

menjamo tako, da je na vrhu tisti, ki je največji -- na vsakem koraku.

na koncu dobimo razcep permutirane matrike.

DOBIMO: $PA = LU$ → permutacijska matrika

Velo: če je A diagonalno dominantna po stolpcih, ni menjav.

Def.: let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\forall_j : |a_{jj}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} |a_{kj}| \Rightarrow$ matrika je diagonalno dominantna po stolpcih.

Zakaj DELNO pivotiranje? ker pivotiramo le po enem stolpcu vsakič.

Kompletno pivotiranje menjamo še stolpce in s tem spreminjamo vrstni red komponent v x. V praksi ne pohitri, zato se ne uporablja.

$$PAQ = LU$$

Primer za delnega pivotiranja:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 12 & 12 \\ 12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1,2)} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ 6 & 6 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 9 & 18 \\ 1/2 & 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ni pivotiranja}} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & 1/4 & 6 & 15 \\ 1/2 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,4)}$$

$$\xrightarrow{(3,4)} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 1/2 & 1 & -8 & -4 \\ 0 & 1/4 & 6 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 1/2 & 1 & -8 & -4 \\ 0 & 1/4 & -3/4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & -3/4 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

matlab