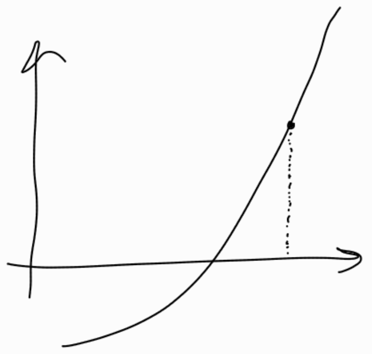
NUMP FMF 2025-10-24

OPOMBA: malce nepopolni zapiski zaradi opekline na prstu

[Kvazi-Newtonove metode]



namesto da odvod računamo vsakič znova, uporabimo istega ne računat. počasnejša konvergenca.

[Sekantna metoda]

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

... nov približek pri tangentni metodi: želimo se znebiti odvoda, uporabimo

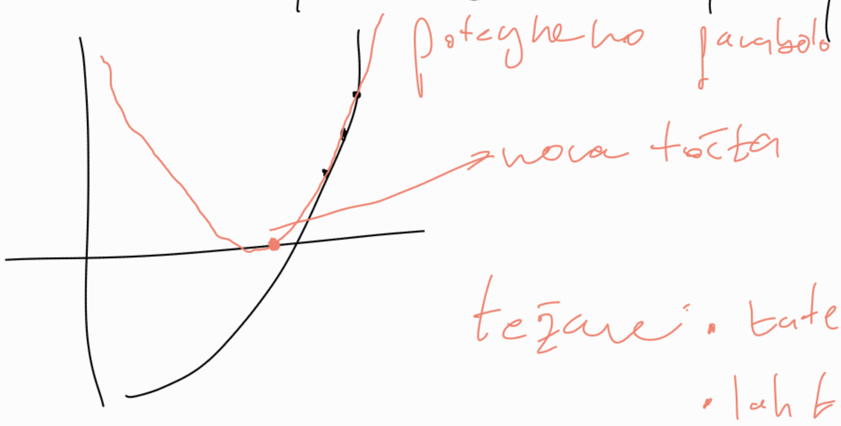
$$f'(x_r) \approx \frac{f(x_r)-f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}$$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r-x_{r-1})}{f(x_r)-f(x_{r-1})}$$

Red je $\approx 1{,}6$

[Müllerjeva metoda]

posplošitev sekantne metode, nov v približek na podlagi TREH prejšnjih.



težave: • katero ničlo izbrati
• lahko ne seka x-osi

[Metoda f, f', f'']

limitni primer müllerjeve metode.

zadnje tri pribl. „stisnemo" v eno tč.

[Halleyeva metoda]

halleyev komet vsakih 70 let

[Brentova metoda] -- fzero v MATLABu

kombinacija metod

[Računanje ničel polinoma]

• iščemo lastne vrednosti neke matrike

·pridružena matrika (angl. companion matrix)

let $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

normirano (s tem ohranimo ničle)

$$\tilde{p}_n(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}$$

polinom ima u koef. in enico.

$$C_{\tilde{p}_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

velja $\det(C_{\tilde{p}_n} - \lambda I) = K \cdot \tilde{p}_n(\lambda)$

dokaz na vajah.

Torej so ničle $\tilde{p}_n$ ravno last. $C_{\tilde{p}_n}$.

MATLAB: roots

Primer: $p(x) = x^5 - 5x + 1$

[Durand-Kerner-jeva metoda] računanje ničel polinoma

let p polinom deg n, (moničen) $p(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$

iščemo $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Recimo da so $z_1, \dots, z_n$ približki za $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

let Δz_i popravki, t.j. $\alpha_i = \Delta z_i + z_i$.

veljati mora $p(z) = (z - (z_1 + \Delta z_1))(z - (z_2 + \Delta z_2)) \cdots (z - (z_n + \Delta z_n))$

$$= \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \Delta z_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (z - z_k) + \cancel{\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} \Delta z_j \Delta z_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^{n} (z - z_i) + \dots}$$

majhen

še manjši, zanemarimo vse nadaljne člene

vstavimo $z = z_i$:

$$\Delta z_i = \frac{-p(z_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (z_i - z_k)}$$

DK metoda: $z_i^{(r+1)} = z_i^{(r)} - \frac{p(z_i^{(r)})}{\prod_{k=1, k\neq i}^{n} (z_i^{(r)} - z_k^{(r)})}$

to je moč vzporedno računati za vsak z_i.

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

kako množimo matriko in vektor?

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ predstavlja lin. presl. $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

aditivnost, homogenost

$A = (a_{ij})_{i \in \{1..m\}, j \in \{1..n\}}$

za $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$(Ax)_i := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$

$A = [a_1 \cdots a_n]$ a_i je i-ti stolpec matrike A

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

$\Rightarrow Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j$

$Ax = b$ ima rešitev $\Leftrightarrow$ rang A = rang$([A, b])$

$Ax = b$, x rešitev

$b = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j$

$\Leftarrow$ rang(A) = rang$([A, b])$

$b = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j \Rightarrow Ax = b$ ima rešitev

[sistemi lin. enačb]

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \iff Ax = b$

e_j je enotski vektor

$\operatorname{Im} A := \{Ax \ \forall x \in \mathbb{R}^n\} = \operatorname{Lin}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$\operatorname{Ker} A := \{x \ ; Ax = 0\}$

$\operatorname{rang} A + \dim \operatorname{Ker} A = n$

$A^{n\times n}$ obrnljiva $\iff \exists A^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \iff \det A \neq 0 \iff$

$\iff \operatorname{rang} A = n \iff \nexists\, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \ni: Ax = 0$

- A simetrična $\iff A^T = A$
- A hermitska $\iff A^H = A$
- A ortog $\iff A^T A = A A^T = I$

[Vektorske in matrične norme]

<u>Def:</u> vektorska norma je preslikava $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \ni:$

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Primeri norme

$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ prva norma

$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ druga/evklidska

$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p}$, $p \in \mathbb{R}$

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$

standardna metrika iz norme: $d(x,y) = \|y-x\|$

MATRIČNE NORME:

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^+$

1. $\|A\| \geq 0$; $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$
3. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
4. (3.) submultiplikativnost: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Primjeri: Frobeniusova norma

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Operatorske norme: definirane s pomoću vektorskih norm:

vektorski normi

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Lema: Svaka operatorska norma je ujedno matrična norma:

1. $\|A\| \geq 0$ ✓

$A = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0 \Rightarrow \|A\| = 0$

$\|A\| = 0 \Rightarrow \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \; \|Ax\| = 0 \Rightarrow A = 0$

2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

$$\|\lambda A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|\lambda A x\|}{\|x\|} = |\lambda| \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \|A\| .$$

③ $$\|A+B\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\| = \|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|+\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \|A\| + \|B\|$$

④