NUMPFMF 2025-10-23

Navadna iteracija.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)$

α ničla $\Leftrightarrow \alpha = g(\alpha)$

α je negib. toč. fje g ←

Primer: $f(x)=x^3-5x+1$ ... MATLAB: linspace, polyval, roots, clf, hold on, grid on, axes "equal", plot, format long

$g_1(x)=\frac{x^3+1}{5}$ $(=x)$ iščemo negibno točko

$x_{r+1}=g_1(x_r)$ $r=0,1,\dots$, x_0 si izberemo

to zaporedje mora konvergirati k eni od negibnih točk.

$g_2(x)=\sqrt[3]{5x-1}$ $(=x)$

[Princip skrčitve]

Def.: Imejmo $f: M \to M$.

M ... metrični prostor z razdaljo d

- $d(x,y)=d(y,x)$
- $x=y \Leftrightarrow d(x,y)=0$
- $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$

če $\exists m: 0<m<1 \ni: \forall x,y \in M: d(f(x),f(y)) \leq m \cdot d(x,y)$,

potem je f skrčitev.

Trditev: Vsaka skrčitev ima fiksno točko, če je M poln metrični prostor.

poln → vsebuje limite vseh konvergentnih zaporedij

Izrek: naj bo α negibna točka fje g in naj g na intervalu $I=[\alpha-d, \alpha+d]$, $d>0$, zadošča Lipschitzovemu pogoju $(\exists m \in [0,1) \forall x,y \in I: |g(x)-g(y)| \leq m|x-y|)$, potem $\forall x_0 \in I$ zaporedje $x_{r+1}=g(x_r)$ za $r=0,1,\dots$ konvergira

k negibni točki α. velja ocena $|x_r-\alpha| \leq \frac{m}{1-m}|x_r-x_{r-1}|$.

Dokaz: najprej dokažimo $\forall r: x_r \in I$:

(1.) $x_0 \in I$ ✓ (2.) $x_{r+1} = g(x_r)$

$|x_{r+1}-\alpha| = |g(x_r)-g(\alpha)| \leq m|x_r-\alpha| \leq$
$\leq md < d$ ✓

$|x_r-\alpha| = |g(x_{r-1})-g(\alpha)| \leq m|x_{r-1}-\alpha| \leq$
$\leq \dots \leq m^r|x_0-\alpha|$

$\lim_{r\to\infty}|x_r-\alpha| \leq \lim_{r\to\infty} m^r|x_0-\alpha| = 0$

torej $\lim_{r\to\infty} x_r = \alpha$.

še dokaz ocene:

$|x_{r+k}-x_r| = |x_{r+k} - x_{r+k-1} + x_{r+k-1} - x_{r+k-2} + x_{r+k-2} - \dots + x_{r+1} - x_r| \leq$

trik. neen. $\leq |x_{r+k}-x_{r+k-1}| + |x_{r+k-1}-x_{r+k-2}| + \dots + |x_{r+1}-x_r| \leq$

$|x_{r+k}-x_{r+k-1}| = |g(x_{r+k-1})-g(x_{r+k-2})| \leq$
$\leq m|x_{r+k-1}-x_{r+k-2}| \leq \dots \leq m^k|x_r-x_{r-1}|$

$\leq (m^k + m^{k-1} + m^{k-2} + \dots + m)|x_r-x_{r-1}| =$
$= m(m^{k-1}+m^{k-2}+\dots+1)|x_r-x_{r-1}| =$
$= m\left(\frac{m^k-1}{m-1}\right)|x_r-x_{r-1}|$

$\lim_{k\to\infty}|x_{r+k}-x_r| = |\alpha - x_r| \leq \lim_{k\to\infty} m\frac{m^k-1}{m-1}|x_r-x_{r-1}| =$

$= \frac{m}{1-m}|x_r-x_{r-1}|$.

Posledica: Naj bo iteracijska fja g zvezno odvedljiva v okolici negibne tč. α in če $|g'(\alpha)|<1$.

Potem $\exists I$ okoli α $\ni$: $\forall x_0 \in I$: $x_{r+1} = g(x_r)$ za $r \in \{0..\}$ konvergira k α.

<u>Dokaz:</u> dovolj je pokazati, da je g skrčitev na I. Ker $|g'(\alpha)| < 1$ in g' zvezna, $\exists$ okolica α, da je $|g'(\alpha)| < 1$ $\forall x \in I$, za poljubna $x, y \in I$ velja, da
$|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)||x - y|$ za $\xi \in I$ (Lagrange).

Če za m vzamemo $m = \max_{\xi \in I} |g'(\xi)| < 1 \Rightarrow$
g skrčitev. $\square$

<u>Def.:</u> negibna točka α fje g je privlačna, če je $|g'(\alpha)| < 1$ in je odbojna, če $|g'(\alpha)| > 1$.

<u>Primer:</u> Če je α odbojna točka iteracije g, je nujno privlačna točka iteracije g^{-1} (če inverz obstaja). (če je g odvedljiva).

$$x = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(x)$$

x odbojna: $|g(x)| > 1$ ..

$$\left(g^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

$$\left|(g^{-1}(\alpha))'\right| = \left|\frac{1}{g'(g^{-1}(\alpha))}\right| = \left|\frac{1}{g'(\alpha)}\right|$$

$\left\{ x = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} x \right.$

<u>Primer:</u> $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. $g(x) = \frac{x^2 + a}{2x}$

$x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \ldots$

kam (če) $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergira?

$L = \lim_{r\to\infty} x_r$: $L = \dfrac{L^2+a}{2L}$

$2L^2 - L^2 = a$ $L^2 = a$ $L = \pm\sqrt{a}$

Vzemimo $X_0 > 0$: tedaj L ne more biti $-\sqrt{a}$.

glej ga zlomka: to je iteracijska metoda za računanje kvadratnega korena. BABILONSKA METODA

trenutno najboljši alg za računanje sqrt.

D.N.: kako izračunati $\sqrt[k]{a}$?

Def: naj bo α privlačna t.č. f.je g in $x_{r+1} = g(x_r)$ za $r \in \{0..\}$. Pravimo, da je red konvergence (hitrost konvergence) enak $p \in \mathbb{R}, p>0$, če $\exists c_1, c_2 > 0, n\in\mathbb{N}\ \forall r > n$:

$c_1 \cdot |x_r - \alpha|^p \leq |x_{r+1} - \alpha| \leq c_2 |x_r - \alpha|^p$.

recimo, da ima x_r k točnih decimalk. koliko novih točnih decimalk pričakujemo v x_{r+1}?

$|x_r - \alpha|$, $|x_r - \alpha|^p$. p-krat

$\approx$ $\approx$

10^{-k} 10^{-kp}

toliko točnih decimalk pričakujemo.

Pogoste so metode reda 2. kam za dosego 16 decimalk potrebujemo 4 korake.

Izrek: Če je g v okolici negibne točke α p-krat zvezno odvedljiva in velja

1. $\alpha = g(\alpha)$
2. $g^{(k)}(\alpha) = 0$ za $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$
3. $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$,

je red konvergence p.

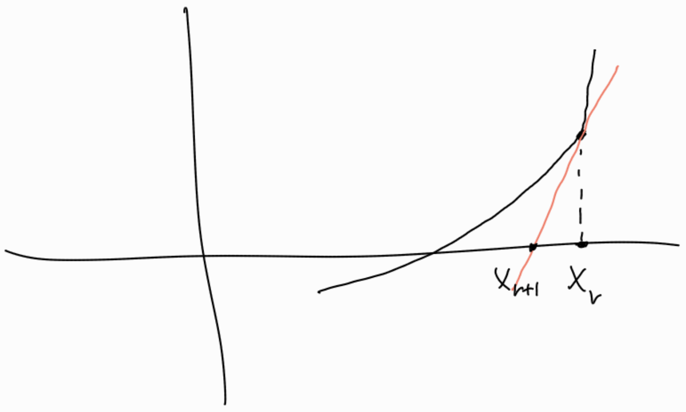
Dokaz: $x_{r+1} = g(x_r) = g(x_r - \alpha + \alpha) =$

$$= \underbrace{g(\alpha)}_{=\alpha} + \underbrace{g'(\alpha)}_{=0}(x_r - \alpha) + \underbrace{\frac{g''(\alpha)}{2!}}_{=0}(x_r - \alpha)^2 + \ldots + \underbrace{\frac{g^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}}_{=0}(x_r - \alpha)^{p-1} + \underbrace{\frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}}_{\neq 0}(x_r - \alpha)^p + \ldots$$

$$x_{r+1} - \alpha = \frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}(x_r - \alpha)^p + \ldots$$

$$|x_{r+1} - \alpha| = \left|\frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!}\right| |x_r - \alpha|^p + \ldots$$

Tangentna (newtnova) metoda:



$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Analitična izpeljava:

x_r približek za α:

$$f(x_r + \Delta x_r) = 0$$

Taylor: $f(x_r) + f'(x_r)\overbrace{\Delta x_r}^{x_{r+1} - x_r} + \ldots = 0$

$$x_{r+1} - x_r = \frac{-f(x_r)}{f'(x_r)} \qquad x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

$$g(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

---

case α enostavna ničla:

↳ prvi odvod enak 0

$f'(\alpha) \neq 0$

$$g(\alpha) = \alpha - \frac{0}{f'(\alpha)} = 0 \Rightarrow \alpha \text{ je negibna točka}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} =$$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow g'(\alpha) = 0$$

---

k-ti koren (od prej):

$\sqrt[k]{a} = ?$

$f(x) = x^k - a = 0$

$f'(x) = kx^{k-1}$

$$x_{r+1} = x_r - \frac{x_r^k - a}{k x_r^{k-1}} = \frac{(k-1)x_r^k + a}{k x_r^{k-1}}.$$