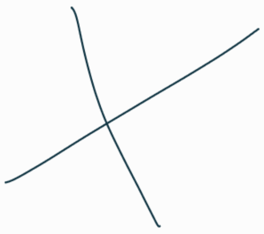
NUMPFMF 2025-10-17

predavanje poteka po prosojnicah, začenši z
[1.3. Vrste napak pri numeričnem računanju]

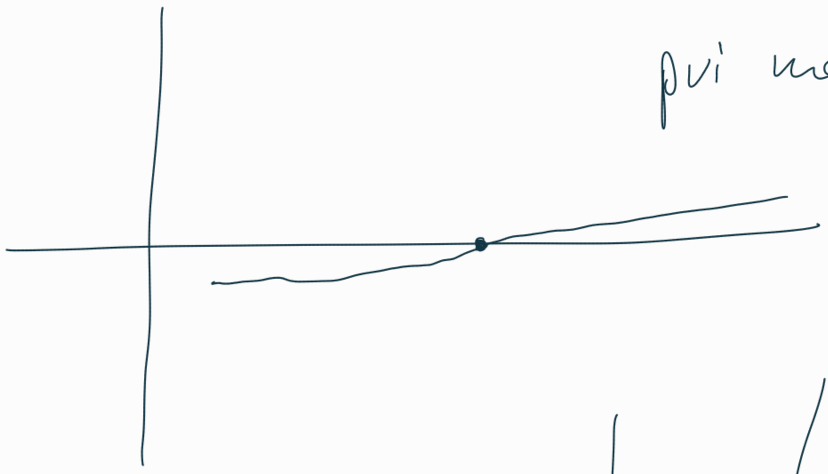
stopnja občutljivosti:

Kje je presečišče?

perturbacije močno premikajo presečišče



tukaj manj. ta sistem je manj občutljiv



pri manjšem odvodu je ničla bolj občutljiva kot pri velikem

s preoblikovanjem izraza lahko dobimo iz nestabilnega problema stabilen problem.

</konec prosojnic>

[numerično reševanje nelinearnih enačb]
(ena enačba z eno neznanko)

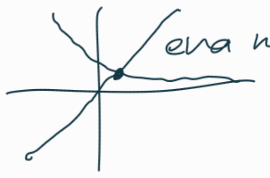
$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iščemo ničle $f(x)=0$

f nelinearna, zvezna.

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ za $a,b,c \in \mathbb{R}$

(2.) $p_n(x)=0$ za $\forall$ polinom stopnje n.

(3.) $f(x)=e^{-x}-x=0$ $\qquad e^{-x}=x$


ena nedua ničla

Lahko dokažemo, da ima ta f'ja natanko 1 rešitev

ker je f zvezna in na $\{0,1\}$ različno predznačena, je na $[0,1]$ vsaj 1 ničla.

ker je f monotono padajoča

$$f'(x)=-e^{-x}-1\le 0 \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

ne more imeti dveh ničel.

(4.) $f(x)=\tan x - x$ $\qquad$ (ima ∞ ničel)

...

Def.: Naj f m-krat zvezno odvedljiva f'ja v okolici $\alpha\in\mathbb{R}$

(1.) α je enostavna ničla, če je $f'(\alpha)\neq 0$

(2.) α je ničla stopnje m, če je $f^{(i)}(\alpha)=0$ za $i=0,1,\dots,m-1$ in $f^{(m)}(\alpha)\neq 0$

občutljivost ničle:

$$\varepsilon = f(\hat\alpha)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\hat\alpha-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(\hat\alpha-\alpha)^2+\dots+\frac{f^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(\hat\alpha-\alpha)^{m-1}+\frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}(\hat\alpha-\alpha)^m+\dots$$

enostavna ničla: $|\hat\alpha-\alpha| \doteq \dfrac{\varepsilon}{|f'(\alpha)|}$ $\qquad \varepsilon \to$ lastnost merilnika: šum

občutljivost je $\dfrac{1}{|f'(\alpha)|}$

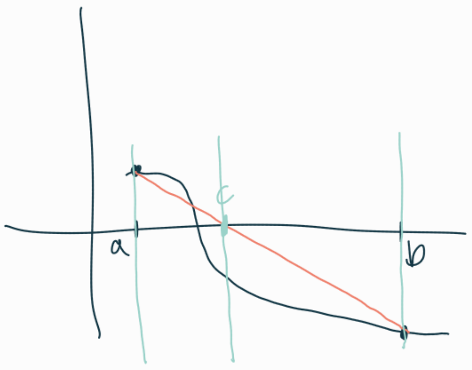
če je ničla m-kratna:

$$|\hat{\alpha}-\alpha| \doteq \sqrt[m]{\frac{\varepsilon\, m!}{|f^{(m)}(\alpha)|}}$$

Posledica: dvojne ničle je težje iskati kot enojne.

Iskanje ničel z bisekcijo. očitno.

Metoda REGULA FALSI (metoda napačne odločitve):



na intervale delimo glede na zveznico med $f(a)$ in $f(b)$ namesto na $\frac{a+b}{2}$

[navadna iteracija]

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(\alpha)=0$, $\alpha \in I$ iščemo α.

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)$ ... preuredimo f

torej $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=g(\alpha)$.

tej α pravimo negibna točka.

standardne preuredbe:

$g(x)=x+f(x)$

$g(x)=x+C\cdot f(x)$, $C\neq 0$

$g(x)=x+h(x)f(x)$, $h(x)\neq 0$ oz $h(\alpha)\neq 0$

generiramo zaporedje

(1) $x_0 \in \mathbb{R}$ poljuben

(2) $x_{r+1}=g(x_r)$ za $r \in \mathbb{N}$

dobimo zaporedje $\{x_r\}_{r\in\mathbb{N}_0}$.

če (x_r) konvergentno: $\lim\limits_{r\to\infty} x_r = L$ tedaj

zvezna

$$\lim_{r\to\infty} x_r = \lim_{r\to\infty} g(x_r) = g\left(\lim_{r\to\infty} x_r\right) = g(L) \Rightarrow L = \alpha$$