Izračunaj lastne vrednosti in lastne vektorje.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&-1&2&3\\0&0&2&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad \Delta_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&1\\-1&-1-\lambda&2&3\\0&0&2-\lambda&2\\0&0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\-1&-1-\lambda&2\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-1&-1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)\big((1-\lambda)(-1-\lambda)+1\big)=$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)\big(-(1-\lambda)(1+\lambda)+1\big)=$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(1^2-\lambda^2+1)=(1-\lambda)(2-\lambda)\big(-(1^2-\lambda^2)+1\big)=$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2)\qquad N=\{0,0,2,1\}$$

$\lambda_{1,2}=0$ } dvojna lastna vrednost

$\Downarrow$

ima algebraično vrednost 2.

dim Ker$(A-\lambda I)$ je geometrijska večkratnost, ki je vedno manjša od algebraične večkratnosti pripadajoče $\lambda$.

da je matriko moč diagonalizirati, mora imeti $n$ LN lastnih vektorjev.

$V_{1,2}$:
$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&-1&2&3\\0&0&2&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\dots\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=$$

$x+y=0$
$z=0$
$w=0$
$y=-x$

$V_{1,2}=(1,-1,0,0)$

$V_3$:
$$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\-1&-2&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\dots\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\-1&-2&1&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$y=w$
$2w=-z$
$-1x-2y+z+w=0$
$-1x-2w-2w+w=0$
$-1x-3w=0$
$-x=3w$
$x=-3w$
$z=-2w$
$y=w$

$V_2=(-3,1,-2,1)$

$V_3$:
$$\begin{bmatrix}-1&1&1&1\\-1&-3&2&3\\0&0&0&2\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\dots\begin{bmatrix}-1&1&1&0\\0&-4&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$w=0$
$4y=z$
$-x+y+z=0$
$-x+y+4y=0$
$x=5y$

$v_3=(5,1,4,0)$

Ne. Diagonalizacija ni mogoča, ker je algebrajska večkratnost $\lambda_1 = 2 < 1 =$ geometrijska večkratnost

N

Izračunaj eigenvalues in eigenvectors. A se da diagonalizirati? $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda)$$

$N = \{5, 4, 5\}$

$\lambda_1 = 4$ ; alge. večk.: 1

$\lambda_{2,3} = 5$ ; alge. večk.: 2

$$V_{2,3}: \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = 2z$

$\{(x, y, 2x); x, y \in \mathbb{C}\}$

$V_{2,3} = \{(0,1,0), (1,0,2)\}$

geometrijska večk.: $\dim \ker(A - \lambda I) = 2$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y = -2x \\ z = 0 \end{matrix}$$

$v_1 = (1, -2, 0)$

$\dim \ker(A - \lambda I) = g.v. = 1$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$P^{-1} = \dots$ obrnljiva je po „karakterizaciji obrnljivih matrik"

N

Dokaži: Podobni matriki imata enako sled.

namig: najprej dokaži $sl(XY) = sl(YX)$

Def.: matriki sta podobni, ko $\exists P$ obrnljiva:

$A \sim B$ $\qquad B = PAP^{-1}$

Def.: $sl(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ $\qquad$ rečemo sled (sl ali trace/tr)

$$sl(XY) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ji} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} y_{ji} x_{ij} =$$

$\Big\{$ za $AB = C$ velja $C_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_{il} b_{kj}$

$$= sl(YX) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} y_{ij} x_{ji} \right) \quad \checkmark$$

Dokaz: $\quad sl\,B \stackrel{?}{=} sl\,A$

$sl(PAP^{-1}) \stackrel{?}{=} sl\,A$

$sl(APP^{-1}) \stackrel{?}{=} sl\,A \rightarrow sl\,A = sl\,A \ \checkmark \ \square$

N

Podobni matriki imata enako sled

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -8 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \\ 24 & 18 & -1 \end{bmatrix}$$

velja:
$a \neq b$
$\neq c \neq$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ a & b & c \\ -1 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

določi lastne vrednosti in eigenvectors za B. velja B podobna A.

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -11-\lambda & -8 & 0 \\ 12 & 9-\lambda & 0 \\ 24 & 18 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left((9-\lambda)(-11-\lambda)+96\right) =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3) =$$

$$= -(1+\lambda)(\lambda+3)(\lambda-1)$$

$\lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 1$

od A vel
vemo $\Delta_A(\lambda) = \Delta_B(\lambda)$

po izrek
$$sl\,A = sl\,B = -3 = 4 + b$$

$$b = -7$$

$$= sl\,D = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\Delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 \\ a & -7-\lambda & c \\ -1 & -7 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 3-\lambda & 4 \\ a & -7\lambda \\ -1 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$$= \ldots = -c(7\lambda - 17) + (1-\lambda)(-21 + 4\lambda + \lambda^2 - 4a) =$$

vstavi 1 za $\lambda$:

$$-c\,10 + 0 \Rightarrow c\,10 = 0$$

$$c = 0$$

vstavi c:

$$(1-\lambda)(-21 + 4\lambda + \lambda^2 - 4a) = 0$$

vstavi $\lambda = -1$

$$2(-21 - 4 + 1 - 4a) = 2(-24 - 4a) =$$

$$= -8(6 - a) = 0$$

$$a = -6$$

torej:

$a = -6 \quad b = -7 \quad c = 0$

in eigenvectors za $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ -1 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = -3$

$$v_1: \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ -1 & -7 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$6x = -4y$
$3x = -2y$
$-x - 7y - 4z = 0 \quad / \cdot -3$
$3x + 21y + 12z = 0$
$-2y + 21y + 12z = 0$
$19y + 12z = 0$
$12z = -19y$

~~$v_1 = (19 \cdot 3x, 19 \cdot -2y, 12 \cdot 2y)$~~

prepisal s table ...

$$v_1 = \left(\frac{-2}{3}, 1, \frac{19}{12}\right)$$

$v_3$: $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad 2z = -6y$$

$z = 3y$

$x = -y$

$v_3 = (-1, -1, 3)$

$v_2$ $\lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -6 & -8 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \to \dots \quad (0, 0, 1)$$

N

$A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $A(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$ $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$

določi eigenvalues & eigenvectors!

$\vec{a} \times \vec{x} = \lambda \vec{x}$

velja $\vec{a} \times \vec{x} \perp \vec{x}$

veljati mora $\lambda \vec{x} \perp \vec{x}$

(1.) $\lambda = 0$ za $\vec{a} \neq \vec{0}$

(2.) za $\vec{a} = 0$ je tudi $\lambda = 0$ $(A\vec{x} = \lambda \vec{x})$

$\hookrightarrow$ $\vec{x}$ je poljuben vektor $\in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \vec{x} = \overbrace{r}^{\in \mathbb{R}} \cdot \vec{a}$ in $\vec{x} \neq \vec{0}$ (da je eigenvector)

za $x = r \cdot \vec{a}$ $\lambda = 0$