N

$A: V \xrightarrow{Lin} V$ dokaži $Au_1, \dots, Au_n$ Lin. neodv. $\Rightarrow u_1, \dots, u_n$ LN

$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \overset{/A}{\Rightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$A(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = A(0)$ aditivnost

$A(\alpha_1 u_1) + \dots + A(\alpha_n u_n) = 0$ homogenost

$\alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_n Au_n = 0$ po predpostavki

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$\square$

N

$A: U \longrightarrow V$ linearna

NTSE:

1.) A je bijektivna

2.) $\{u_1, \dots, u_n\}$ je baza $U \Rightarrow \{Au_1, \dots, Au_n\}$ je baza V

3.) $\exists$ baza $\{u_1, \dots, u_n\}$ prostora U, za katero je $\{Au_1, \dots, Au_n\}$ baza prostora V.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ A je bijektivna. $\{u_1, \dots, u_n\}$ baza U

$\{Au_1, \dots, Au_n\}$ je baza V

- $Au_1, \dots, Au_n$ je LN

$\alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_n Au_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

ker je bijektivna:

$A(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = 0$ (ker je injektivna)

$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$,

ker je $u_1, \dots, u_n$ baza, je

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ✓

- $Au_1, \dots, Au_n$ je ogrodje prostora V.

let v poljuben $\in V$.

$v = \alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_n Au_n$

zaradi surjektivnosti

$\exists u \ni: Au = v$

u je L.K. baze U:

$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$

$v = A(u) = A(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) =$

$= \alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_n Au_n$ ✓

$\square$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ očitno

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ bijektivnost: surj., inj.

izrek: injektivnost $\Leftrightarrow$ ima trivialno ker

$$Ax = Ay \Rightarrow x = y$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$A(x-y) = 0 \qquad y - x = 0$$

$$A(z) = 0 \Rightarrow z = 0$$

---

sedaj je treba dokazati še $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ ← samo 0.

torej $Au = 0 \Rightarrow u = 0$ → baza V

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$Au = \alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_n Au_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow u = 0$$

• ~~surjektivnost~~ surjektivnost:

$\forall v \in V \ \exists u \in U \ni: Au = v$ $\qquad v = \alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_n Au_n$

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$Au = A(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \;//\; V$$

□

N Določi rang linearnih preslikav: $\vec{x} \longrightarrow \vec{a} \times \vec{x}$, $\quad \vec{x} \longrightarrow (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b}$

v odvisnosti od $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

za $\vec{a} = (0,0,0)$ $\qquad \vec{a} \times \vec{x} = (0,0,0) \quad \forall x$

rang = dim Im = 0

za $\vec{a} \neq (0,0,0)$

Vzemimo bazo $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{a} \times \vec{c}\}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$

1. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
2. $\vec{a} \times \vec{c} =$
3. $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \underbrace{\vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c})}_{=0} - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{a})$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\vec{a}\cdot\vec{a} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rang} = \dim \operatorname{Im} = 2$$

DRUGA PRESLIKAVA:

$$\vec{x} \longmapsto (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}$$

case: $\vec{a} = 0$ ali $\vec{b} = 0$ $\quad$ je spet ničelna preslikava:

rang = dim Im = 0

case: $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta Lin. odv. $\vec{b}=\lambda\vec{a}$

$\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}\times\vec{c}\}$ $\vec{c}\perp\vec{a}$

(1) $\vec{x}=\vec{a}$: $(\vec{a}\cdot\lambda\vec{a})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\lambda\vec{a})\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{x}=\vec{c}$: $(\vec{a}\cdot\lambda\vec{a})\vec{c}-\underbrace{(\vec{c}\cdot\lambda\vec{a})\cdot\vec{a}}_{=\vec{0}}$

(3) $x=\vec{a}\times\vec{c}$ $(\vec{a}\cdot\lambda\vec{a})(\vec{a}\times\vec{c})-(\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\lambda\vec{a}}_{\vec{0}})\vec{a}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{a}\cdot\lambda\vec{a} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{a}\cdot\lambda\vec{a} \end{bmatrix} \quad \text{rang} = \dim \operatorname{Im} = 2$$

case $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta LN: $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\}$ $\vec{a}\perp\vec{b}$

(1) $\vec{x}=\vec{a}$: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{x}=\vec{b}$: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}$

(3) $\vec{x}=\vec{a}\times\vec{b}$: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})-(\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}}_{=0})\cdot\vec{a}$

$$\begin{bmatrix} 0 & \vec{a}\vec{b} & 0 \\ 0 & -\vec{b}\vec{b} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{a}\cdot\vec{b} \end{bmatrix} \quad \text{rang} = \dim \operatorname{Im} = 2$$

N. LASTNE VREDNOSTI IN LASTNI VEKTORJI

$Ax=\lambda x$ $\quad x\neq 0$

lastni vektor; lastna vrednost

$Ax=\lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda I)x=0 \Leftrightarrow x\neq 0\,;\ x\in \ker(A-\lambda I)$

$\ker(A-\lambda I)=\{0\} \Leftrightarrow A-\lambda I$ ni obrnljiva $\Leftrightarrow \det(A-\lambda I)=0$

karakteristični polinom

Določi: l. vr. in l. ve. za $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

karakteristični polinom

$$\Delta_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \\ -2 & -4 \end{matrix} =$$

$$=(3-\lambda)(4-\lambda)(-1-\lambda)-4-8+4(4-\lambda)+4(3-\lambda)-2(-1-\lambda)=$$

$$=(12-3\lambda-4\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda)\cancel{-12}+16-4\lambda+\cancel{12}-4\lambda+2+2\lambda=$$

$$=-12+7\lambda-\lambda^2-12\lambda+7\lambda^2-\lambda^3+18-6\lambda=$$

$$=6-11\lambda+6\lambda^2-\lambda^3=0$$

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

N: $\{1,2,3\}$

sedaj moramo najti lastne vektorje

1. $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ y+z &= 0 \\ y &= -z \end{aligned}$$

lastni vektorji: $\{(0, y, -y);\ y \in \mathbb{C}\}$

$v_1 = (0, -1, 1)$

$\lambda_2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} z &= 0 \\ x+2y &= 0 \\ x &= -2y \end{aligned}$$

$\{(-2y, y, 0);\ y \in \mathbb{C}\}$

$V_2 = (-2, 1, 0)$

$\lambda_3 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\dots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= -z \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$\{(x, 0, -x);\ x \in \mathbb{C}\}$

$V_3 = (1, 0, -1)$

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -13 & 2 & 3 \\ -21 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

-2

diagonaliziraj A in določi $P \ni: A = PDP^{-1}$

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 & 2 \\ -13 & 2-\lambda & 3 \\ -21 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \dots$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 2$

najdi lastne vektorje!

...

V_1: $\{(x, 2x, 3x);\ x \in \mathbb{C}\}$

...

$V_2 = (2, 5, 7)$

$V_3 = (0, 1, 0)$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A = PDP^{-1}$

$$P = \begin{bmatrix} \vec{V}_1 & \vec{V}_2 & \vec{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$P = P_{B_S \leftarrow B_L}$

$P^{-1} = P_{B_L \leftarrow B_S}$