LAIV FMF 2023-01-09

N

Reši $2x+5=6$
$3x+6=5$
v $\mathbb{Z}_7$ s pomočjo Gaussove metode

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[II+=2I]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[I+=II]{} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$2x \equiv 2 \pmod 7 \quad /:2$
$2y \equiv 3 \pmod 7$
$2y \equiv 3+7 \pmod 7 \quad 2y \equiv 10 \pmod 7 \quad /:2$

$$\left[\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod 7 \\ y \equiv 5 \pmod 7 \end{array}\right.$$

2. Določi vse hom. kolobarjev.

$f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{26}$

$f(x+y) = f(x)+f(y)$
$f(xy) = f(x)\, f(y)$

red k je tak a, da je
za k $\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{k} = 0 = ka$
za $\cdot$ oz. $a^k = 1$

mi iščemo le za $+$, ker je tam grupa

$f(k) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k}) = \underbrace{f(1)+\cdots+f(1)}_{k} = k f(\underbrace{1}_{})$
torej je treba preverjat

mora veljati red $f(a) \mid$ red a

→ ob tem pogoju nista možna reda 13, 26.

redi $\mathbb{Z}_6$: 1, 2, 3, 6
redi $\mathbb{Z}_{26}$: 1, 2, ~~13~~, ~~26~~

gledamo le slikanje enice.

torej sta hom. dva:
$f_1(1) = 0$
$f_2(1) = 13$

red iz kodomene mora deliti vsaj en red domene.

N

(Z End$(V,+)$ označimo množico vseh hom. iz $(V,+)$ v $(V,+)$. Ta množica je kolobar za operaciji: $\cdot\ (\varphi+\psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$
$\cdot\ (\varphi\psi)(a) = \varphi(a)\,\psi(a) \quad \forall a$)

...

N

V $\mathbb{R}^2$ vpeljemo naslednji dve operaciji:

$(x,y) \oplus (u,v) = (x \oplus u,\ y \oplus v)$

$\lambda(x,y) = (\lambda x, \; y)$

ali je $\mathbb{R}^2$ s tima operacijama vektorski prostor?

najprije $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ je abelova grupa. dakle je $(\mathbb{R},+)$ abelova grupa. (...) ok, $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ je abelova grupa.

pojmovi za vektorski prostor:

$F \times V \to V$

$(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$

Aksiomi

i) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

ii) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

iii) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

iv) $1 \cdot v = v$

i) $\lambda((x,y)+(u,v)) = \dots = \lambda(x,y) + \lambda(u,v)$

ii) $(\alpha+\beta)(x,y) = (\alpha x + \beta x, y)$

$\alpha(x,y) + \beta(x,y) =$

$= (\alpha x + \beta x, 2y)$

NISU JEDNAKI

NE.

N

Na množici $V = (0, \infty)$ uvedemo operacije:

$a \oplus b = ab$

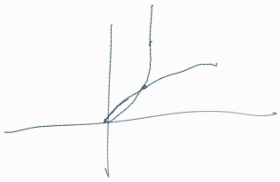
$\lambda \odot a = a^\lambda$. Ali je to vekt. pr. na $\mathbb{R}$?

$a, b \in V$

$a \oplus b = ab \in V$ očito.

$\lambda \odot b = b^\lambda$

$(\mathbb{R}^{+\mathbb{R}^+} \in \mathbb{R}^+)$



dokaži $(V, \oplus)$ je abelova grupa:

$\forall a,b \in \mathbb{R}^+ : ab \in \mathbb{R}$ ✓

$\forall a \in \mathbb{R}^+ : ae = a$ ✓, tada $e = 1$ $\quad e \in \mathbb{R}^+$

$\forall a,b \in \mathbb{R}^+ : ab = ba$ ✓

asoc: dakle je $\cdot$ v $\mathbb{R}^+$ asoc.

$\forall a\, a^{-1} \in \mathbb{R} : a a^{-1} = e = 1$ ✓ $\quad -a = a^{-1} \to$ inverz a v $(V, \oplus)$.

distr: $\lambda(a \oplus b) \stackrel{?}{=} \lambda a \oplus \lambda b$

$(ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda$ ✓ v $\mathbb{R}^+$.

ii.) $(\alpha+\beta)\odot u \overset{?}{=} \alpha\odot u \oplus \beta\odot u$

$u^\alpha \oplus u^\beta = u^\alpha u^\beta$

$u^{\alpha+\beta}$ ✓

iii.) $(\alpha\cdot\beta)\odot v = \alpha\odot(\beta\odot v)$

$v^{\alpha\beta}$ $\qquad \alpha\odot(v^\beta) = \left(v^\beta\right)^\alpha = v^{\beta\alpha}$ ✓

iv.) $1v = v$

$1\odot v = v^1 = v$ ✓

N. Katere od naslednjih množic so vektorski podprostori V? $\qquad V=\mathbb{R}^n$

$\forall x,y \in V$ in $\forall \alpha\in F$

$x+y\in V$

$\alpha\cdot x\in V$

a.) $\mathcal{A} = \{ x\in\mathbb{R}^n ; x_1\in\mathbb{Z} \}$

let $\alpha = 1/2$

tedaj $\mathcal{A} = \{$

...