N

Ugotovi lastnosti naslednjih operacij v $\mathbb{R}$!

$a \circ b = a^2 + b^2$

asoc.? NE
kom.? DA
enota? NE
inverz? NE

$(a \circ b) \circ c \stackrel{?}{=} a \circ (b \circ c)$

$(a^2+b^2)^2 + c^2 \stackrel{?}{=} a^2 + (b^2+c^2)^2$

protiprimer: $a, b, c = 1, 1, 2$

$2^2 + 2^2 \neq 1 + 5^2$

$8 \neq 26$

$a \circ b = b \circ a$

$a^2 + b^2 = b^2 + a^2$ ✓

enota? ne $\quad a^2 + e^2 = a$

$a - a^2 = e^2$

$\underbrace{\pm\sqrt{a - a^2}}_{\text{odvisno od } a.} = e$

protiprimer

$a = 2$

$\sqrt{2-4} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

$\nexists \Rightarrow \nexists$ inverz. inverzov ni.

$a \circ b = ab^2$

kom? $ab^2 \stackrel{?}{=} a^2 b$ ne. protiprimer: $a=1, b=2$: $1 \cdot 4 \neq 1 \cdot 2$

asoc.? $(ab^2)^2 c = a(bc^2)^2$ $\quad a^2 b^4 c \neq a b^2 c^4$ protiprimer: $a,b,c = 1,1,2$

$2 \neq 16$

enota? $\quad ae^2 = a$

$e = \frac{a}{a} \quad e = \pm 1$

desni enoti sta dve, zato leve ni. zato enote ni.

↳ več njih obstaja.

$a \circ b = a + b + ab$

asoc.? $\quad (a \circ b) \circ c \stackrel{?}{=} a \circ (b \circ c)$ $\quad$ JE.

$(a+b+ab) \circ c \stackrel{?}{=} a \circ (b + c + bc)$

$\cancel{a+b+ab+c} + \cancel{ac+bc} + \cancel{abc} \stackrel{\checkmark}{=} \cancel{a+b+c+bc} + \cancel{ab+ac} + \cancel{abc}$

kom.? $\quad a+b+ab \stackrel{\checkmark}{=} b+a+ba$ ✓ JE

enota? $\quad a + e + ae = a$ $\quad$ zaradi kom. $\exists$ tudi desna

$e + ae = 0$ $\quad$ JE.

$e(1+a) = 0$

$e = 0$

$\exists$ desna

inverz? $\quad a \circ a^{-1} = e$

$$a + a^{-1} + aa^{-1} = e$$

$$a^{-1} + aa^{-1} = e - a = -a$$

$$a^{-1}(1+a) = -a \qquad a \neq -1$$

$$a^{-1} = \frac{-a}{1+a}$$

$$\exists a^{-1} \ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

N

Dokaži, da je $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = ax+b,\ a \neq 0 \ \& \ a,b \in \mathbb{R}\}$ grupa za komponiranje funkcij.

$$f, g \in S \Rightarrow \underline{f \circ g \in S}$$

$$f(x) = ax+b \qquad g(x) = cx+d$$

$$(f \circ g)(x) = \underset{\neq 0}{a}(\underset{\neq 0}{c}x+d) + b = acx + ad + b =$$

$$= \underset{\neq 0}{ac}x + (ad+b) \quad \checkmark$$

asoc.?

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$f(g(h(x))) = f(g(h(x))) \quad \checkmark$$

enota?

$$f \circ e = f$$

$$f(e(x)) = f(x) \qquad \text{desna } \exists.$$

$$e(x) = x$$

$$e(f(x)) = f(x)$$

$$e(x) = x \quad \text{leva } \exists.$$

$$f^{-1} \circ f = e$$

$$f(x) = ax+b \qquad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} \qquad \text{levi inverz obstaja.}$$

tu pride prav $a \neq 0$

$$f \circ f^{-1} = e$$

$$f^{-1}(x):$$

LAHKO BI NAREDILI

SE PRETVORIS: (morali bi ga pravzaprav)

$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ Lesni tadi.

je grupa! <3 <3 <3 yay!

N

Pokaži, da je $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}); \det A \neq 0\}$ „general linear"

grupa za matrično množenje.

asoc.: smo dokazali na predavanjih.

enota: I_n

inverz: $AA^{-1} = I_n$; $A^{-1}A = I_n$ ker $\det \neq 0$

je grupa za matrično množenje.

vsebovanost!

$AB \in GL_n(\mathbb{R})$

$E_1 E_2 \cdots E_n$ $E_1' E_2' \cdots E_n'$

produkt el. matrik je obrnljiv ($\det AB \neq 0$)

a je $SL_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) ; \det A = 1\}$. grupa?

ja, glej prejšen dokaz.

„special linear"

+ vsebovanost:

$\det(AB) = \det A \det B = 1 \cdot 1 = 1$. ✓

enota I? ja, $\det I_n = 1$ ✓

inverz? $\det(AB)^{-1} = \det^{-1}(AB) = 1$ ✓

[GRUPA PERMUTACIJ]

$S_n = \{\sigma : N \longrightarrow N ; \sigma \text{ je bijekcija}\}$

N je množica števil $\{1, \dots, n\}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} =$$

→ dvovrstični zapis

→ ciklični zapis

$$= (i_1\ i_2\ i_3 \ldots i_k)\underbrace{(\ldots)\cdots(\ldots)}_{\text{disjunktni cikli}}$$

$\sigma(i_1) = i_2$

...

N

N

N

cikel dolžine k ≡ produkt $k-1$ transpozicij

določi parnost permutacij

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} = (1\,3\,5\,2)(6\,7)$$

$\operatorname{sgn} \sigma$

$$\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\rho}$$

"parnost"

N

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)(4\,5\,6\,8)$$

parnost: liha. $\operatorname{sgn}((1\,2\,3))\operatorname{sgn}((4\,5\,6\,8)) = 1 \cdot (-1)^3 =$

$= -1$

Določi red.