Izrek: Najkrajša splošna rešitev sistema $Ax=b$ je enaka A^+b.

Dokaz: Splošen primer prevedemo na diagonalni primer, obdelan zadnjič. Najprej navedimo SVD za A.

$$A = \underbrace{Q_1}_{\text{ortogonalni}} \underbrace{D}_{\text{diagonalna}} \underbrace{Q_2^{-1}}_{\text{ortogonalni}} \quad , \text{ kjer } A \text{ } m\times n \text{ matrika} \Rightarrow D \text{ } m\times n$$

Splošna rešitev sistema $Ax=b$ je minimizator izraza $\|Ax-b\|$.

Opazimo, da je $\|Ax-b\| = \|Q_1 D Q_2^{-1}x - b\| = \|Q_1(DQ_2^{-1}x - Q_1^{-1}b)\| =$

množenje z ortogonalno matriko ohranja normo

$$= \|D\underbrace{Q_2^{-1}x}_{x'} - \underbrace{Q_1^{-1}b}_{c}\| = \|Dx'-c\|$$

Če x preteče vse vektorje v $\mathbb{C}^n$, potem x' tudi preteče vse vektorje v $\mathbb{C}^n$ (Q_2 je obrnljiva).

Torej je $\min\limits_{x\in\mathbb{C}^n} \|Ax-b\| = \min\limits_{x'\in\mathbb{C}^n} \|Dx'-c\|$

Če $\|Ax-b\|$ zavzame minimum v x_0, potem $\|Dx'-c\|$ zavzame minimum v $x_0' = Q_2^{-1}x_0$ in obratno: če $\|Dx'-c\|$ zavzame minimum v x_0', potem $\|Ax-b\|$ zavzame minimum v $x_0 = Q_2 x_0'$ (to sledi iz $\|Ax-b\| = \|D(Q_2^{-1}x)-c\|$).

Torej je $x \longrightarrow x' = Q_2^{-1}x$ bijektivna korespondenca med posplošenimi rešitvami $Ax=b$ in posplošenimi rešitvami $Dx'=c$. Opazimo, da ta preslikava ohranja normo $\|x'\| = \|Q_2^{-1}x\| = \|x\| \Rightarrow$ To je tudi bijektivna korespondenca med najkrajšimi posplošenimi rešitvami $Ax=b$ in najkrajšimi posplošenimi rešitvami $Dx'=c$.

Vemo, da je najkrajša posplošena rešitev od $Dx' = c$ prav
$$x_0 = D^+ c.$$
„Po zgornji diskusiji sledi", da je $x_0 = Q_2 x_0'$ najkrajša posplošena rešitev od $Ax = b$

Dobimo $$x_0 = Q_2 x_0' = Q_2 D^+ c = \underbrace{Q_2 D^+ Q_1^{-1}}_{} b = A^+ b$$

[KVADRATNE FORME]

Uvod: Forma je homogen polinom, torej tak, v katerem imajo vsi monomi isto stopnjo.

stopnja monoma: $\deg \beta \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

polinom je vsota monomov.

stopnja polinoma je max stopnja monoma v njem.

Primeri form: linearna forma v 3 spremenljivkah:
$$ax + by + cz = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Kvadratna forma je torej homogen polinom stopnje 2:
$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Kubična forma v 3 spremenljivkah:
$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dx^2y + ex^2z + fy^2x + gy^2z + iz^2x + jz^2y + kxyz$$

Radi bi navedili klasifikacijo kvadratnih form.

Če navedimo primerno linearno zamenjavo koordinat, se kvadratna forma poenostavi v $ex^2 + fy^2$.
(mešani členi izginejo).

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}}_{\text{označimo s } P} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{T}{=} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}}_{\text{označimo z } A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} P^T A P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \dots$$

opomba: pravimo, da sta matriki A in B kongruentni, če $\exists$ obrnljiva $P \ni: B = PAP^T$.

Ker je A simetrična, lahko izberemo tako ortogonalno P, da je P^TAP diagonalna, recimo $\begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$.

$$\dots = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = d_1 (x')^2 + d_2 (y')^2$$

Če zahtevaš, da je P ortogonalna, lahko dosežeš celo, da je P^TAP oblike $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Kaj vemo o ortogonalnih 2×2 matrikah?

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow P^TP = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

da je $P^TP = I$; $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$

$ab + cd = ab + cd = 0$

$\Rightarrow a = \cos\varphi \,,\quad c = \sin\varphi$

$b = \cos\psi \,,\quad d = \sin\psi$

$\cos(\psi + \varphi) = 0$

$\hookrightarrow \psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow P$ je

$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ ali $\longrightarrow$ vrtež za kot φ

$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \longrightarrow$ zrcaljenje čez $\varphi/2$

$\hookrightarrow \det = 1$ $\qquad \hookrightarrow \det = -1$

če je $\quad A = [v_1 \;\; v_2] \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} [v_1 \;\; v_2]^{-1}$, je tudi

$$A = [v_1 \;\; -v_2] \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} [v_1 \;\; -v_2]^{-1}$$

$\det [v_1 \; v_2] = -1 \Rightarrow \det [v_1 \; -v_2] = 1$

Če je $[v_1, v_2]$ ortog., je tudi $[v_1 \; -v_2]$ ortog.

če je A 2×2 simetrična matrika, lahko poiščemo tak vrtež $P = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$, da je $A = P \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} P^{-1}$

Povzetek: $\quad ax^2 + bxy + cy^2 \xrightarrow{\text{z vrtež}} d_1 x'^2 + d_2 y'^2$

Primer: Nariši krivuljo $\quad 4x^2 + 4xy + 7y^2 = 1$

$$[x \;\; y] \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

Radi bi se znebili mešanega člena:

$$= [x' \; y'] \, P^T \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 1 = \ldots$$

iščemo tak vrtež P, da bo $P^T A P$ diagonalen.

$$\mathrm{Lastn}\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\right) = \{3, 8\} \qquad \text{Lastv:}$$

$$\mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \ldots \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Ker} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \ldots \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sta ortogonalna. Če normirati jih moramo:

$$\begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

kateco izbed:

$$P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \text{ zrcaljenje}$$

$$\text{ali } P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \text{ vrtež}$$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2/\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}} = 2$$

$$\varphi = \operatorname{atan} 2 \approx 63{,}4^\circ$$

$$\ldots = [x' \; y'] \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ldots \quad 8x'^2 + 3y'^2 = 1$$

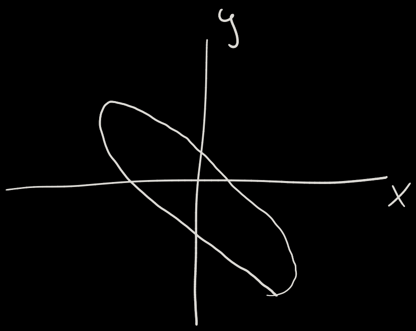
narišimo tole, zavrtimo za $63{,}4^\circ$ in dobimo isto krivuljo!

elipsa:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

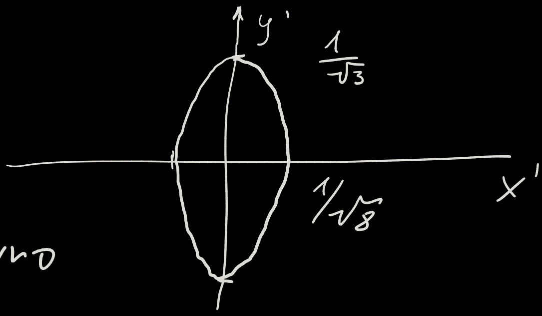
s polosema a in b. naša elipsa ima polosi

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \text{ in } \frac{1}{\sqrt{3}}:$$



zavrti

(v negativno smer)



meta: pri prvem poizkusu izboljševanja šteje boljša ocena.

USTNI IZPITI:

- petek, 14. 6

traja 45 minut.

vprašanja:

1. prvi semester
2. do skal. produkta
3. skal. prod. in dalje
   ↳ norme, ortog. baze
   SVG

Demo: ① karakterizacija linearnih matrik

NTS: 1. obstaja A^{-1}

2. $\det A \neq 0$

- n LN stolpcev
- n LN vrstic
- stolpci tvorijo ogrodje

$1. \Leftrightarrow 2.$

$(\Rightarrow)$ predp. A obrnljiva.

obstaja A^{-1}, da $AA^{-1} = I$

$$\det AA^{-1} = \det I$$

$$\det AA^{-1} = 1$$

$$\det A \det (A)^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \det A \neq 0 \quad \wedge \quad \det (A)^{-1} = 0$$

$(\Leftarrow)$ $\det A \neq 0$.

$$\frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^{T} \quad \ldots$$

② Kako linearni preslikavi priredimo matriko:

$L: U \to V$ baza za U so $u_1, \ldots, u_n$.

$\downarrow$ V so $v_1, \ldots, v_m$.

homogena, aditivna

$$L = \begin{bmatrix} Lu_1 & Lu_2 & \cdots & Lu_n \end{bmatrix},$$ razpisani po bazi V.