16:00 kolokvij CAI 2.05 ← META

[PSEUDOINVERZ ~ MOORE-PENROSEOV INVERZ]

posplošitev inverza na nenujno kvadratne matrike tudi za kvadratne matrike je to posplošitev

začnimo z diagonalnimi matrikami:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

če je na diagonali ničla, matrika ni obrnljiva.

ideja za posplošeni inverz:

ničelne diagonalce ignoriramo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kvadratne matrike: pseudoinverz $m \times n$ matrike je $n \times m$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oznaka za pseudoinverz je plus

Če je D diagonalna matrika $m \times n$ z neničelnimi diagonalci $d_1, \dots, d_r$, je D^+ diagonalna $n \times m$ matrika z neničelnimi diagonalci $\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \dots, \frac{1}{d_r}$.

za diagonalno D opazimo: $D^{++} = D$

D obrnljiva $\Rightarrow D^+ = D^{-1}$

Posplošitev na nediagonalne matrike — s pomočjo SVD.

$\underbrace{A = Q_1 D Q_2^{-1}}$ $\exists$: D diagonalna, Q_1, Q_2 ortogonalni/unitarni.

A obrnljiva $\Leftrightarrow$ D obrnljiva

$\hookrightarrow \quad A^{-1} = Q_2 D^{-1} D_1^{-1}$

za splošen nenujno obrnljiv A: $\quad A^+ = Q_2 D^+ Q_1^{-1}$

problem z definicijo: SVD za A ni nujno enoličen, mi pa si želimo enolično definiran A^+.

Dokažimo torej, da je s to definicijo A^+ enolična ne glede na izbiro singularnega razcepa.

OPOMBE: 1.) $A^{++} = (Q_2 D^+ Q_1^{-1})^+ = Q_1 D^{++} Q_2^{-1} = Q_1 D Q_2^{-1} = A$

2.) A obrnljiva: $\quad A^+ = A^{-1}$

Dokaz: A obrnljiva $\Leftrightarrow$ D obrnljiva:

$$A^+ = Q_2 D^+ Q_1^{-1} = Q_2 D^{-1} Q_1^{-1} = A^{-1}$$

OSNOVNE LASTNOSTI PSEVDOINVERZA:

1. $A A^+ A = A$ $\qquad$ 2. $A^+ A A^+ = A^+$ $\qquad$ 3. $(A A^+)^* = A A^+$

4. $(A^+ A)^* = A^+ A$ $\qquad$ ... za vse matrike A.

OPOMBA: te 4 lastnosti so ekvivalentna definicija psevdoinverza.

Ideja dokaza:
- preverimo veljavnost za diagonalne matrike
- s SVD še za splošne.

1. $$DD^+D = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/d_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = D$$

opomba: če so ničle vmes, jih lahko permutiramo s permutacijsko matriko, ki je ortogonalna $\Rightarrow$ SVD. tu namreč predpostavljamo, da so neničelni diagonalci skupaj

2. $D^+ D D^+ = D^+$ $\quad$ ... podobno

3. $(DD^+)^* = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = DD^+$ 4. $(D^+D)^*$ podobno

— sedaj še za splošen A: ustavimo SVD:

1. $AA^+A = Q_1 D \overbrace{Q_2^{-1} Q_2}^{I} D^+ \overbrace{Q_1^{-1} Q_1}^{I} D Q_2^{-1} = Q_1 \overbrace{DD^+D}^{D \text{ po 1. pog}} Q_2^{-1} = Q_1 D Q_2^{-1} = A$

2. $A^+AA^+ = A^+$ ... podobno

3. $(AA^+)^* = (Q_1 D \underbrace{Q_2^{-1} Q_2}_{I} D^+ Q_1^{-1})^* = (Q_1 DD^+ Q_1^{-1})^* = Q_1 \overbrace{(DD^+)^*}^{DD^+ - 3.\text{ pog}} \underbrace{Q_1^{-1}}_{\text{ort.}\; Q_1^*}$

$= AA^+ = Q_1 D Q_2^{-1} Q_2 D^+ Q_1^{-1} = Q_1 DD^+ Q_1^{-1}$

4. $(A^+A)^* = A^+A$ ... podobno

<u>Dokaz enoličnosti psevdoinverza:</u>

let $A = Q_1 D Q_2^{-1} = Q_3 E Q_4^{-1}$

$B = Q_2 D^+ Q_1^{-1}$ (prvi psevdoinverz) $C = Q_4 E^+ Q_3^{-1}$ (drugi psev.)

$B \overset{?}{=} C$

velja $ABA = A$, $BAB = B$, $(AB)^* = AB$, $(BA)^* = BA$

$ACA = A$, $CAC = C$, $(AC)^* = AC$, $(CA)^* = CA$

Najprej dokažimo, da je $AB = AC$ in $BA = CA$, odtod sledi

$B = BAB = CAB = CAC = C$

$AB \overset{!}{=} AC$

$AB = ACAB = (AC)^* AB = (AC)^*(AB)^* = C^*A^*B^*A^* = C^*(ABA)^* =$

$= C^*A^* = (AC)^* = AC$

$BA = CA$ ... podobno

Kako izračunamo A^+ brez SVD? trik.

Če je A pozitivno semidefinitna, jo lahko diagonaliziramo v ortonormirani bazi:

$$A = P \underbrace{\overset{\text{pozitivni diagonalci}}{D}}_{\geq 0} \underbrace{P^{-1}}_{= P^*}$$

Opazimo, da je to SVD od $A \Rightarrow Q_1 = P,\ Q_2 = P,\ D = D$

$$\longrightarrow A^+ = P D^+ P^{-1} = Q_2 D^+ Q_1^{-1}$$

Za splošno matriko A pa velja:

$$A^+ = (\underbrace{A^* A}_{\geq 0})^+ A^* = A^* (\underbrace{A A^*}_{\geq 0})^+$$

najprej preverimo, da to velja za diagonalne matrike:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & d_r & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \Rightarrow D^* = \begin{bmatrix} \bar d_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \bar d_r & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}_{n \times m} \Rightarrow D^* D = \begin{bmatrix} \|d_1\|^2 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \|d_r\|^2 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \Rightarrow$$

$$(D^* D)^+ = \begin{bmatrix} \|d_1\|^{-2} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \|d_r\|^{-2} & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \Rightarrow (D^* D)^+ D^* = \begin{bmatrix} \frac{\cancel{\bar d_1}}{\cancel{\bar d_1} d_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{\cancel{\bar d_r}}{\cancel{\bar d_r} d_r} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix} = D^+$$

Za splošen A uporabimo SVD, da to dokažemo:

$A = Q_1 D Q_2^{-1}$. Velja:

$$A^* A = Q_2 D^* Q_1^{-1} Q_1 D Q_2^{-1} = Q_2 \underbrace{D^* D}_{\geq 0} Q_2^{-1}$$

$$\Rightarrow A^* A = Q_2 (D^* D) Q_2^{-1}$$

$$\Rightarrow (A^* A)^+ A^* = Q_2 (D^* D)^+ \cancel{Q_2^{-1} Q_2} D^* Q_1^{-1} = Q_2 \underbrace{(D^* D)^+ D^*}_{D^+} Q_1^{-1} = A^+ \overset{\text{def.}}{=\!=} Q_2 D^+ Q_1^{-1} \quad //$$

V posebnih primerih lahko poenostavimo še naprej.
Recimo, da ima A LN stolpce. $\Rightarrow \ker A = \{0\}$

ker je A^*A kvadratna in $\ker A^*A = \{0\}$, $\Leftarrow \ker A^*A \overset{\text{od prej}}{=} \ker A = \{0\}$
je A^*A obrnljiva in velja $(A^*A)^{-1} = (A^*A)^+$.
takrat torej velja: $A^+ = (A^*A)^{-1} \cdot A^*$

OPOMBA:
to smo uporabili pri iskanju posplošene rešitve predoločenega sistema

$A\vec{x} = \vec{b}$; iščemo $\vec{x}$, da je $\|A\vec{x} - \vec{b}\|$ minimalen.
Tak $\vec{x}$ je posplošena rešitev.
Vemo, da je posplošena rešitev $A\vec{x} - \vec{b}$ enaka posplošeni rešitvi od $A^*A\vec{x} = \vec{b}$.
Če ima A LN stolpce, je A^*A obrnljiva $\Longrightarrow$
$$Ax = (A^*A)^{-1}A^*b = A^+b$$

UPORABA PSEUDOINVERZA

Vemo, kaj je posplošena rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.
Problem: sistem ima lahko več posplošenih rešitev.
↳ to se lahko zgodi, ko A nima LN stolpcev.
[med vsemi temi posplošenimi rešitvami iščemo najkrajšo — $\|\vec{x}\|$

Izrek: Najkrajša posplošena rešitev $Ax = b$ je ravno $x = A^+b$

Dokaz za diagonalen primer:

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_m, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\|Ax - b\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} d_1x_1 \\ \vdots \\ d_rx_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right\|^2 = \underline{(d_1x_1 - b_1)^2 + \dots + (d_rx_r - b_r)^2} + b_{r+1}^2 + \dots + b_m^2.$$

Ta izraz doseže minimum $\Leftrightarrow$ tadar je $\underline{\qquad\qquad} = 0$.

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{b_1}{d_1}$$
$$\ldots$$
$$x_r = \frac{b_r}{d_r}$$
$$\left.\begin{array}{l} x_{r+1} = \text{poljuben} \\ \ldots \\ x_n = \text{poljuben} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ne vpliva na } \sigma.$$

Torej posplošena rešitev sistema $Ax = b$ je torej

$$\left(\frac{b_1}{d_1}, \ldots, \frac{b_r}{d_r}, \underbrace{x_{r+1}, \ldots, x_n}_{\text{poljubni}}\right) \rightarrow \text{rešitev je več.}$$

najkrajša: $\left(\frac{b_1}{d_1}, \ldots, \frac{b_r}{d_r}, 0, \ldots, 0\right)$

Preverimo, da je to res enako $A^+ b$:

$$A^+ = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & d_r^{-1} & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix}_{n \times m} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A^+ b = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{d_1} \\ \ldots \\ \frac{b_r}{d_r} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{res je!}$$

splošen primer naslednjič.