Trditev: za vsak stal. prod $[\cdot,\cdot]$ – glej def. od prej – na $\mathbb{C}^n$ obstaja tata pozitivno definitna matrica A, da velja $[u,v] = \underbrace{\langle Au, v\rangle}_{\text{std. st. pr.}} = u^* v$ za vse $u, v \in \mathbb{C}^n$

Dokaz: let $e_1, \dots, e_n$ std. baza za $\mathbb{C}^n$. Definiramo

$$A = \begin{bmatrix} [e_1,e_1] & \cdots & [e_n,e_1] \\ \vdots & & \vdots \\ [e_1,e_n] & \cdots & [e_n,e_n] \end{bmatrix}$$

Kratki račun pokaže, da je $A^* = A$ in da je

$[u,v] = v^* A u$ za vse $u, v \in \mathbb{C}^n$.

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{[e_1,e_1]} & \cdots & \overline{[e_1,e_n]} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{[e_n,e_1]} & \cdots & \overline{[e_n,e_n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e_1,e_1] & \cdots & [e_n,e_1] \\ \vdots & & \vdots \\ [e_1,e_n] & \cdots & [e_n,e_n] \end{bmatrix} = A$$

$u = \sum \alpha_i e_i$ $= \sum \beta_j e_j \Rightarrow$

$$[u,v] = \sum_i \sum_j \alpha_i \overline{\beta_j} [e_i, e_j] = [\overline{\beta_1} \cdots \overline{\beta_n}] A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = v^* A u = \langle Au, v\rangle$$

Če vstavimo $v = u$, dobimo

$$\langle Au, u\rangle = u^* A u = [u,u] > 0 \quad \forall u \in \mathbb{C}^n$$

Torej je $A > 0$.

SINGULARNI RAZCEP

SINGLE VALUE DECOMPOSITION (SVD)

•) Singularne vrednosti matrike.

Naj A bo kompleksna ali realna matrika $m \times n$,

Tedaj je A^*A $n \times n$ hermitska matrika.

Ker je $\langle A^*A u, u \rangle = \langle Au, Au \rangle \geq 0 \quad \forall u$,

je matrika A^*A poz. semidef.

Torej so vse njene lavr ≥ 0.

<u>Definicija</u>: Singularne vrednosti A so kvadratni koreni lastnih vrednosti A^*A.

<u>Primer</u>: Če je A normalna in λ lavr za A,

obstaja tak $v \neq 0$ $\exists$: $Av = \lambda v \Rightarrow A^* v = \bar{\lambda} v$.

odtod sledi, da je $A^*Av = A^*\lambda v = \lambda A^* v = \lambda \bar{\lambda} v$,

torej je $\lambda\bar{\lambda}$ lastna vrednost matrike A^*A.

Po definiciji singularne vrednosti je $\sqrt{\lambda\bar{\lambda}} = |\lambda|$

singularna vrednost matrike A.

OPAŽANJE

Za normalne matrike so sing vr iste kot abs. vrednosti lavr.

Nekatere sing vr so enake 0, nekatere pa strogo večje. Koliko je katerih?

Število ničelnih sing vr matrike A je število ničelnih lastnih vrednosti matrike A^*A (večkratnost lastne vrednosti 0 za hermitsko A^*A, torej je alg. več. = geo. več.)

$= \dim \ker A^*A$ ← alg.

Upoštevano $\ker A^*A = \ker A$, torej je

št. 0 singvr $A = \dim \ker A = n(A)$
↳ ničelnost

Število neničelnih: ker je A^*A $n\times n$ matrika, je število vseh singvr A n, torej je št. nenič. singvr $= n - \dim \ker A$. Upoštevajoč

OSNOVNI IZREK:
$nA + rA =$ št. stolpcev $A = n$, je

št. nenič. singvr $=$ rang $A = \dim \operatorname{Im} A$

OPOMBA: Za $m\times n$ matriko A velja rang $A \leq \min\{m,n\}$.

•) Izrek o singularnem razcepu:

Kako pojem diag. matrike posplošimo na nekvadratne matrike?

<u>Def.:</u> matrika $D_{m\times n}$ je diagonalna, če velja:

$$\forall i \in \{1..m\}, j \in \{1..n\}: i \neq j \Rightarrow \underbrace{D_{i,j}}_{i,j\text{-ti element}} = 0$$

primeri pravokot. diag:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Izrek (o sing. razc.):</u> Let A kompleksna $m\times n$ matrika. Potem obstajata taki unitarni Q_1, Q_2 in taka diagonalna D z diagonalci ≥ 0 $\ni$: $\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{Q_1} \underset{m\times n}{D} \underset{n\times n}{Q_2^{-1}}$

Opomba: diagonalci D bodo ravno singularne vrednosti matrike A.

Opomba: ker je Q_2 unitarna, je $Q_2^* = Q_2^{-1} \Rightarrow A = Q_1 D Q_2^*$

Opomba: Če $A = Q_1 D Q_2^*$, je $A^* = Q_2^{**} D^* Q_1^* =$

$= Q_2 D^* Q_1^*$

Q_1 unitarna

in $A^*A = Q_2 D^* \cancel{Q_1^* Q_1} D Q_2^* = Q_2 D^* D \underset{\underset{Q_2^{-1}}{\parallel}}{Q_2^*}$

torej je A^*A podobna D^*D

Diagonalci D^*D so lavr A^*A in stolpci Q_2 so lave A^*A.

Diagonalci D so bodisi 0 bodisi kvadratni koreni od diagonalcev D^*D, torej kvadratni koreni lavr A^*A, torej singvr od A.

Dokaz obstoja singularnega razcepa:

Načrt: konstruiramo Q_2, D, Q_1 in dokažimo veljavnost

1.) Konstrukcija Q_2:

A je $m \times n$ kompleksna. Tvorimo $n \times n$ matriko A^*A. Izračunamo lavr A^*A in jih uredimo padajoče. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, večkratne lavr! poz. semidef. A^*A $\forall i \in \{1..n\}$:

Let $v_1, \dots, v_n$ pripadajoči lave $A^*Av_i = \lambda_i v_i$

Te v_i lahko izberemo tako, da so ortonormirani, namreč lastni podprostori A^*A so paroma pravokotni, saj je A^*A normalna, saj je hermitska, in v vsakem ON podprostoru izberemo ONB in $v_1, \dots, v_n$ je unija teh ON baz.

Definiramo $Q_2 := \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$. Ker so $v_1, \dots, v_n$ ON, je Q_2 unitarna.

Konstrukcija matrike D:

let $r := \text{rang}\, A$ (št. neničelnih singularnih vrednosti A)

Oglejmo si zaporedje lastnih vrednosti A^*A:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \lambda_1 & \geq & \lambda_2 & \geq \dots \geq & \lambda_r & > & \lambda_{r+1} & \geq & \dots & \geq & \lambda_n & \geq 0 \\ \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| & \\ \sigma_1^2, & & \sigma_2^2, & \dots, & \sigma_r^2, & & 0, & & \dots & , & 0 & \end{array}$$

lastne vrednosti A^*A: $\underbrace{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_r^2}_{\text{neničelne}}, 0, \dots, 0$

Definirajmo D kot diagonalno $m \times n$ matriko, kjer je

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Konstrukcija Q_1:

$\forall i \in \{1..r\}$: Označimo $u_i := \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ (dolžine m; v_i dolžine n)

$$A^*A v_i = \lambda_i v_i \quad \text{in} \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Pokažimo, da je $u_1, \dots, u_r$ ortonormirana množica.

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle \frac{1}{\sigma_i} A v_i, \frac{1}{\sigma_j} A v_j \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle A v_i, A v_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle A^*A v_i, v_j \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \frac{\overset{=\sigma_i^2}{\lambda_i}}{\sigma_i \sigma_j} \langle v_i, v_j \rangle = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i \sigma_j} \langle v_i, v_j \rangle =$$

$$= \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$$

Sedaj ONM $u_1, \dots, u_r$ dopolnimo do ONB za $\mathbb{C}^m$.
z vektorji $\boxed{u_{r+1}, \dots, u_m}$. $\to$ dopolnitev do ONB.

Definiramo $Q_1 = [u_1 \; \cdots \; u_m]$ matrika s stolpci $u_1, \dots, u_m$.

Ker so stolpci ONB, je matrika unitarna.

4. korak: Preverimo, da velja $A = Q_1 D Q_2^{-1}$.

izračunajmo $A Q_2 = Q_1 D$.

$$A Q_2 = A \; [\underbrace{v_1 \; \dots \; v_n}_{\text{l. vekt. od } A^*A}] = [A v_1 \; \cdots \; A v_n] = \dots$$

upoštevaje $i > r \Rightarrow \lambda_i = 0 \Rightarrow A^*A v_i = \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow$
$v_i \in \ker A^*A \Leftrightarrow$
$v_i \in \ker A \Leftrightarrow A v_i = 0$
vsi stolpci od r naprej so 0:

$$\dots = [A v_1 \; \cdots \; A v_r \; 0 \; \cdots \; 0]$$

$$Q_1 D = [u_1 \; \cdots \; u_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{bmatrix} = [\sigma_1 u_1 \cdots \sigma_r u_r \; 0 \cdots 0] =$$

$$\underline{\underline{\text{def } u_i}} \; \left[\cancelto{1}{\sigma_1 \frac{1}{\sigma_1}} A v_1 \; \cdots \; \cancelto{1}{\sigma_r \frac{1}{\sigma_r}} A v_r \; 0 \cdots 0\right] = [A v_1 \cdots A v_r \; 0 \cdots 0]$$

$$A Q_2 = Q_1 D \quad \square$$

Opomba: Če je A realna matrika, sta tudi Q_1 in Q_2 realni unitarni matriki (= ortogonalni)

Primer:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$$ Poišči singularni razcep A!

najprej izračunamo $$A^*A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}=\dots=$$

$$=\begin{bmatrix}2&1&-2&-1\\1&2&-1&-2\\-2&-1&2&1\\-1&-2&1&2\end{bmatrix}.$$

Izračunamo $\Delta_{A^*A}(x)=\det(A^*A-xI)=\dots=x^2(x-2)(x-6)$

torej lastne vr od A^*A so $0,0,2,6$, torej neničelni singvr A sta $\underset{\sigma_2}{\sqrt{2}}, \underset{\sigma_1}{\sqrt{6}}$. rank $A=2$.

Izračunajmo lave od A^*A: od 6: $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$, norma 2

od 2: $\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$, norma 2

od 0: $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$, normi $\sqrt{2}$

Z Gram-Schmidtom naredimo ortog. množ. V tem primeru so že.

treba jih je normirati:

$$v_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\quad v_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\quad v_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}\quad v_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$Q_2=\begin{bmatrix}\frac12&\frac12&\frac{1}{\sqrt2}&0\\\frac12&-\frac12&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac12&-\frac12&\frac{1}{\sqrt2}&0\\-\frac12&\frac12&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$$ realna z ON stolpci ↳ ortogonalna

$$D=\begin{bmatrix}\sqrt6&0&0&0\\0&\sqrt2&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Q_1 :

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sta že ON.

dopolnimo ju do ONB za $\mathbb{R}^3$

↳ z gram schmidtom oz uganemo $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

normiramo

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$ ortog. matrika.

preizkus! $\quad A Q_2 = Q_1 D.$

Iskani razcep: $\quad A = Q_1 D Q_2^{-1}$