PONOVIMO:

let $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

$A^* = \overline{A}^T$ osnovna lastnost: $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$

za std. stal. prod.

za kvadratno A velja

λ je lastna vrednost $A \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ je lastna vrednost A^*

lastni vektorji A in A^* v splošnem niso v korelaciji, razen v posebnih primerih, recimo, če je A normalna.

če $\underline{A \text{ normalna}}$ in $Av = \lambda v \Rightarrow A^* v = \overline{\lambda} v$

$\downarrow$

$A^*A = AA^*$

Dokazali smo, da se da vsako normalno matriko diagonalizirati v ortonormirani bazi, torej:

A normalna $\longrightarrow A = PDP^{-1}$ $\quad P^{-1} = P^*$

D ↓ diag

P ↳ ortonormirani stolpci glede na std stal prod v $\mathbb{C}^n$.

Dokazali smo: P ima ortonormirane stolpce

$\Longleftrightarrow P^*P = PP^* = I \Leftrightarrow P^* = P^{-1}$

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ P je ortogonalna v realnem oz. unitarna v kompleksnem primeru.

Normalne matrike $AA^* = A^*A$

ortog./unitarne $A^*A = AA^* = I$

simetrične/hermitske $A^* = A$

pozitivno (semi) definitne

$\forall v: \langle Av, v\rangle = 0$

OPOMBA: Za pravokotne matrike velja le:

P ima ON stolpce $\Leftrightarrow P^*P = I$

po ① – vzamemo std. bazo

To ekvivalenco je mož še naprej razširiti:

① $P^*P = I \Leftrightarrow$

② $\forall u,v: \langle Pu, Pv\rangle = \langle u,v\rangle \Leftrightarrow$

③ $\forall u: \|Pu\| = \|u\| \Leftrightarrow$

④ $\forall$ ONB $u_1, \dots, u_n$: $Pu_1, \dots, Pu_n$ je ON množica $\Leftrightarrow$

⑤ $\exists$ ONB $u_1, \dots, u_n$: $Pu_1, \dots, Pu_n$ je ON množica

① $\Rightarrow$ ② $\langle Pu, Pv\rangle = \langle u, P^*Pv\rangle = \langle u, Iv\rangle = \langle u,v\rangle$

② $\Rightarrow$ ③ $\|Pu\|^2 = \langle Pu, Pu\rangle = \langle u,u\rangle = \|u\|^2$

② $\Rightarrow$ ① $\langle Pu, Pv\rangle = \langle u,v\rangle \Rightarrow \langle u, P^*Pv\rangle = \langle u,v\rangle$

$\Rightarrow \langle u, (P^*P - I)v\rangle = 0 \quad \forall u,v$

let $u = (P^*P - I)v$

$\Rightarrow (P^*P - I)v = 0 \quad \forall v$

$\Rightarrow P^*P - I = 0$

$\Rightarrow P^*P = I$

③ $\rightarrow$ ②: $\|Pu\| = \|u\| \quad \forall u$ (predp.)

Rabimo polarizacijske identitete:

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u + i^k v\|^2 \quad \text{v } \mathbb{C}$$

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{1} (-1)^k \|u + (-1)^k\|^2 \quad \text{v } \mathbb{R}$$

$$\langle Pu, Pv\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|Pu + i^k Pv\|^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|P(u + i^k v)\|^2 \overset{\text{predp.}}{=\!=} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u + i^k v\|^2 = \langle u,v\rangle \quad \forall u,v$$

5. $\Rightarrow$ 4. Vzemimo poljuben u in ga razvijmo po ONB $u_1, \dots, u_n$

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

ker so u_i ONB:

$$\|u\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$$

ker so Pu_i ONB po 5 in

$$\|Pu\|^2 = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2$$

Torej je $\|Pu\|^2 = \|u\|^2$ 3.

2. $\Rightarrow$ 4. očitno.

$u_1 \dots u_n$ ONM $\Rightarrow \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 ; & i=j \\ 0 ; & i \neq j \end{cases}$

$\overset{2.}{\Rightarrow} \langle Pu_i, Pu_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 ; & i=j \\ 0 ; & i \neq j \end{cases}$

$\Rightarrow Pu_1, \dots, Pu_n$ ONM

4. $\Rightarrow$ 5. očitno.

Kaj vemo o lastnih vrednostih unitarnih matr?

Kaj vemo o lastnih vrednostih za unit. m. A.

Let λ lastna vrednost za unit. m. A.

$\Rightarrow \exists v \neq 0 \ni : Av = \lambda v$ $\qquad \lambda = e^{i\varphi}$ za nek φ

$\Updownarrow$

$\Rightarrow \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle$

$\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle$, $\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle \Rightarrow \lambda \bar{\lambda} = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$

Kaj vemo o lastnih ~~vektorjih~~ ortogonalnih matrik?

isto, kot za normalne matrike.

(A ortog $\Rightarrow$ A norm.) $\quad$ lastni vektorji, ki pripadajo paroma različnim lastnim vrednostim, so pravokotni

Kaj vemo o diagonalizaciji unitarnih matrik? Isto kot za normalne.

$A = PDP^{-1}$

↳ diag: $\begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{bmatrix}$

↳ unitaren $P \Leftrightarrow P$ zadošča $P^* = P^{-1}$

[SIMETRIČNE / HERMITSKE MATRIKE]

Zanimajo nas matrike, ki zadoščajo $A^* = A$

v $\mathbb{R}$ jim rečemo simetrične

v $\mathbb{C}$ pa hermitske

Če delamo z lin. presl., so to (@KRUP)
sebi adjungirane linearne preslikave.

OPOMBA: Vsaka hermitska / sim. matrika je normalna.

$$A^* A = AA = AA^*$$

Kaj vemo o lastnih vrednostih takih matrik?

let λ lastna vrednost za A in $A = A^*$

Potem $\exists v \neq 0 \ni: Av = \lambda v$

odtod sledi:

$$\begin{aligned}
\langle Av, v \rangle &= \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle \\
\langle Av, v \rangle &= \langle v, A^* v \rangle \overset{A^*=A}{=} \langle v, Av \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ vse lastne vrednosti hermitskih matrik so realne

O lastnih vektorjih vemo to, kar vemo o njih iz normalnih matrik $\Rightarrow$ različnim lastnim vrednostim pripadajo ortog. la. vek.

Kaj vemo o diagonalizaciji? Isto kot za normalne:

Vse hermitske je moč diagonalizirati:

$$A = PDP^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P^* = P^{-1}$$

$\forall i: \lambda_i \in \mathbb{R}$, kar v splošnem seveda ne velja

za realne

OPOMBA:

$$A = A^* \iff \langle Av, v \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall v$$

To je res v kompleksnem primeru, ne pa v realnem (??!)

[POZITIVNO (SEMI)DEFINITNE MATRIKE]

<u>Def.:</u> A je pozitivno semidefinitna $\iff A = A^*$ in $\forall u: \langle Au, u \rangle \geq 0$

↳ oznaka $A \geq 0$

A je pozitivno definitna $\iff A = A^*$ in $\forall u \neq 0: \langle Au, u \rangle > 0$

↳ oznaka $A > 0$

implicira realnost skal. produkta

Primer pozitivno semidefinitne matrike:

vzemimo poljubno matriko B (nenujno kvadratno) in definirajmo $A = B^* B$. Potem je A pozitivno semidefinitna.

$$A^* \overset{?}{=} A$$

$$\left\{ (AB)^* = B^* A^* \right.$$

$$A^* = (B^* B)^* = B^* B = A$$

$$\langle Av, v \rangle = \langle B^* B v, v \rangle = \langle Bv, B^{**} v \rangle = \langle Bv, Bv \rangle \geq 0$$

če ima B linearno neodvisne stolpce, če A pozitivno definitna in če $\boxed{tu}$ stroga neenakost.

↳ sledi iz $B^*B = \ker B$

Kaj vemo o lastnih vrednostih (semi) def. matrik?

$A \geq 0 \Rightarrow$ lastne vrednosti A so ≥ 0

$A > 0 \Rightarrow$ last. vr. A so > 0

Dokaz: Naj λ la.vr. A in $A \geq 0$.

tedaj $Av = \lambda v$ za nek $v \neq 0$

odtod sledi $\underbrace{\langle Av, v\rangle}_{\substack{\vee\!\mid \\ 0}} = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle$

$\Rightarrow \lambda \langle v, v\rangle \geq 0$ in $\langle v, v\rangle > 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$

... in analogno za $A > 0$.

la.vr so pod istimi omejitvami kot hermitske
la.ve so pod istimi omejitvami kot normalne
diag. je ista kot za normalne +

$A \geq 0 \Rightarrow A = PDP^{-1}$

↳ $D \geq 0$

↳ $P^{-1} = P^*$

Trditev: Če $A \geq 0$ $\exists$ $B = B^*$, $B \geq 0$ $\ni$: $B^2 = A$

DOKAZ: $A = PDP^{-1}$ in $P^* = P^{-1}$ in $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \geq 0$

definiramo $E := \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \geq 0$

Naj $B = PEP^{-1} = PEP^*$ → $B \geq 0$

Dokažimo $B^* = B$: $B^* = (PEP^*)^* = P^{**}E^*P^* = P\ EP^* = B$

$$B^2 = PEP^{-1}PEP^{-1} = P\underbrace{E^2}_{=D}P^{-1} = PDP^{-1}$$

$E^* = E$, ker je $\forall a \in \mathbb{R}: \sqrt{a} \in \mathbb{R}$.

TAKO DEFINIRAMO $\sqrt{A}$: $\sqrt{A} = B$

Povzetek: NTSE:

1. A je pozitivno ~~semidefinitna~~ definitna
2. $A = A^*$ in vse lastv A so ≥ 0 ($>$)
3. $A = PDP^{-1}$ za neko unitarno P in diagonalno $D \geq 0$ ($>$)
4. $A = A^*$ in obstaja $\sqrt{A}$
5. $A = B^*B$ za neko matriko B (nenujno kvadratno)

   B LN stolpce

Zveza med pozitivno definitnimi matrikami in skalarnimi produkti.

Klasifikacija skalarnih produktov na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$

Naj $\langle u, v \rangle$ std skal prod na $\mathbb{C}^n$.

$u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $v = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$$\Rightarrow \langle u, v \rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \dots + \alpha_n \overline{\beta_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{\beta_1} & \dots & \overline{\beta_n} \end{bmatrix}}_{v^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{u} = v^* \cdot u$$

(množenje matrik)

Naj $A > 0$. definiramo $[u, v] = \langle Au, v \rangle = v^* A u$

Trdimo, da je $[\cdot,\cdot]$ spet skalarni produkt na $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$ in da je vsak skalarni produkt v $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ take oblike.

Zakaj je $[u,u]>0$ za $u\neq 0$.

Sledi iz def. poz. def. matrike:

$$[u,u] = \langle Au,u\rangle \underset{A>0}{\underset{\Uparrow}{>}} 0 \quad \forall u\neq 0$$

Zakaj je $[v,u] = \overline{[u,v]}$

$$[v,u] = \langle Av,u\rangle = \langle v, A^*u\rangle \overset{A=A^*}{=} \langle v,Au\rangle \overset{\text{simetričnost}}{=}$$
$$= \overline{\langle Au,v\rangle} = \overline{[u,v]}.$$

Zakaj je $[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v] = \alpha_1 [u_1,v] + \alpha_2 [u_2,v]$?

očitno iz definicije:

$$\langle A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v\rangle = \langle \alpha_1 Au_1 + \alpha_2 Au_2, v\rangle =$$
$$= \alpha_1 \langle Au_1, v\rangle + \alpha_2 \langle Au_2, v\rangle =$$
$$= \alpha_1 [u_1,v] + \alpha_2 [u_2,v]$$

dokazan