LA1P FMF 2024-04-24

Adjungiranje – ponovitev:

za lin. preslikavo $L : U \to V$ je adj. lin. presl. $L^* : V \to U$, da velja $\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^* v \rangle \ \forall u, v$.

Dokaz eksist.: za $m \times n$ matriko A nad F je njena adj. matrika $\overline{A}^T = A^* \in M_{n \times m}(F)$. To zadošča, kadar je skal. prod. standarden.

Če preslikavi priredimo matriko v ONB, je adj. presl. za to presl. adj. matrika. Zdb: Zveza med L^* in A^*:

$$(L^*)_{B \leftarrow C} = (L_{C \leftarrow B})^* \qquad (L_A)^* = L_{A^*} \quad (\text{za std. sk. p.})$$

(B v U, C v V)

Lastnosti adjungiranja, dokazane na vajah.

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$A^{**} = A$$

[Ker in Im adjungirane linearne preslikave:]

Let $L : U \to V$ linearna. Zanimata nas $\mathrm{Ker}\, L^*$ in $\mathrm{Im}\, L^*$. Radi bi ju izrazili s $\mathrm{Ker}\, L$ in $\mathrm{Im}\, L$.

Formula: $\mathrm{Ker}\, L^* = (\mathrm{Im}\, L)^\perp$ — ortogonalni komplement

Če $L \to L^*$ ortog. kompl. na obeh straneh applyamo:

$$\mathrm{Im}\, L^* = (\mathrm{Ker}\, L)^\perp$$

Dokaz formule:

$v \in \mathrm{Ker}\, L^*$, $\quad L^* : V \to U$, $\ni v$

$v \in \mathrm{Ker}\, L^* \iff L^* v = 0$ — def. jedra

$\iff \langle u, L^* v \rangle = 0 \quad \forall u \in U$ — aksiom skalarnega produkta

$\iff \langle Lu, v \rangle = 0 \quad \forall u \in U$ — def. L^*

$\iff \langle w, v \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathrm{Im}\, L = \{ Lu ;\ \forall u \in U \}$ — def. Im

$\iff v \in (\mathrm{Im}\, L)^\perp \longrightarrow$ def. ortogonalnega kompl.

velja torej: $\ker L^* = (\operatorname{Im} L)^\perp$ (1.)

$\Downarrow L \to L^*$

$\ker L = (\operatorname{Im} L^*)^\perp$ (2.)

$\Downarrow \perp$

$(\ker L)^\perp = \operatorname{Im} L^*$ (3.)

$\Downarrow L \to L^*$

$(\ker L^*)^\perp = \operatorname{Im} L$ (4.)

V nadaljevanju bomo potrebovali še tole formulo:

$$\ker (L^* L) = \ker L \qquad L : U \to V$$

Dokaz: Vzemimo $u \in U$

$(\supseteq)$ Če $u \in \ker L \Rightarrow Lu = 0 \quad \backslash \cdot L^*$

$L^* L u = L^* 0 = 0$

$\Rightarrow u \in \ker (L^* L)$

$(\subseteq)$ Če $u \in \ker L^* L \Rightarrow L^* L u = 0$

$\Rightarrow \langle u, L^* L u \rangle = 0$

$\overset{\text{def } L^*}{\Longrightarrow} \langle Lu, Lu \rangle = 0$

$\Rightarrow Lu = 0 \Rightarrow u \in \ker L.$

Posledica formule $\ker (L^* L) = \ker L$:

$$\operatorname{Im} (L^* L) = \operatorname{Im} L^*$$

Dokaz: Iz $\ker L^* L = \ker L$ sledi:

$(\ker L^* L)^\perp = (\ker L)^\perp$

$\| (3.) \qquad \| (3.)$

$\operatorname{Im} (L^* L)^* \qquad \operatorname{Im} L^*$

$\| \text{ last. } L^* \qquad \| \square$

$\operatorname{Im} (L^* L^{**}) \underset{\text{last. } L^*}{=} \operatorname{Im} (L^* L)$

[LASTNE VREDNOSTI ADJUNGIRANE LIN. PRESL.]

Radi bi dokazali:

→ če je λ lastna vrednost za A, je $\bar{\lambda}$ lastna vredn. za A^*.

$$\det(A-\lambda I)=0 \qquad\qquad \det(A^*-\bar{\lambda} I)=0$$

Označimo $B=A-\lambda I$. Tedaj $B^*=A^*-\bar\lambda I^*=A^*-\bar\lambda I$

Radi bi dokazali: $\det B=0 \Rightarrow \det B^*=0$.

$$B^*=\bar{B}^T \quad /\det$$

$$\det B^* = \underbrace{\det \bar{B}^T = \det \bar{B}}_{\text{lastnost det}} = \underbrace{\overline{\det B}}_{\text{lastnost } \overline{} \text{ za vsoto in produkt}}$$

$$\Longrightarrow \overline{\det B}=0 \iff \det B^*=0 \qquad \square$$

→ Iz te formule izvemo tudi: karakteristični polinom od A^*:

$$\boxed{\text{Def. } p_A(x) := \det(A-xI)}.$$

$$p_{A^*}(x)=\det(A^*-xI)$$

$$\Longrightarrow p_A(\bar{x})=\det(A-\bar{x}I)=\det(A^*-xI)^*=\overline{\det(A^*-xI)}=$$

$$=\overline{p_{A^*}(x)}.$$

$$\Longrightarrow p_{A^*}(x)=\overline{p_A(\bar{x})}.$$ torej če je $p_A(x)=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n$,

je $p_{A^*}(x)=\overline{p_A(\bar{x})}=\overline{c_0+c_1\bar{x}+\dots+c_n\bar{x}^n}=$

$$=\underbrace{\bar{c}_0+\bar{c}_1x+\dots+\bar{c}_nx^n}_{\text{konjugirani koeficienti } p_A}$$

Alternativen dokaz: Najprej dokažimo $\dim \ker B^* \overset{?}{=} \dim \ker B$

$$\dim \ker B^* = \dim (\operatorname{Im} B)^{\perp} \underset{\text{upoštevajoč } \operatorname{Im} B \oplus \operatorname{Im} B^{\perp}=F^n}{=} n-\dim \operatorname{Im} B \underset{\text{upoštevajoč } \dim B=\dim \operatorname{Im} B+\dim\ker B}{=} \dim \ker B$$

Torej $\ker B^* \neq 0 \iff \ker B \neq 0$

$\Updownarrow$ $\bar{\lambda}$ je lastna vrednost za A — $\Updownarrow$ λ je lastna vrednost za A

Torej lastne vrednosti A^* so konjugirane lastne vrednosti A.

Kakšna je pa zveza med lastnimi vektorji A in A^*?

- V splošnem (žal) ni kakšne posebne zveze.

Primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ i & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -i \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ -2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2 \end{bmatrix}$$

nobenih kolinearnosti ni tule.

- Obstajajo pa zveze v zanimivih posebnih primerih:

Če matrika A zadošča $A^*A = AA^*$, (rečemo A je normalna)

iz $Av = \lambda v$ sledi $A^* v = \bar{\lambda} v$

A in A^* imata iste lastne vektorje.

NTS:
· panel hide
· scrollbar hide

$$(A - \lambda I) = 0 \quad\Downarrow\quad Bv = 0 \quad\Updownarrow\quad v \in \ker B$$

$$(A^* - \bar{\lambda} I) = 0 \quad\Updownarrow\quad B^* v = 0 \quad\Downarrow\quad v \in \ker B^*$$

$\overset{?}{\Longleftrightarrow}$

dokazati je treba $\ker B^* = \ker B$

1. korak:
Če velja $B^*B = BB^*$:

$$A^*A = AA^* \Rightarrow B^*B = BB^* : \quad B^*B = (A^* - \bar{\lambda} I)(A - \lambda I) = \cancel{A^*A} - \cancel{\bar{\lambda} A} - \cancel{\lambda A^*} + \bar{\lambda}\lambda I$$

$$BB^* = (A - \lambda I)(A^* - \bar{\lambda} I) = \cancel{AA^*} - \cancel{\bar{\lambda} A} - \cancel{\lambda A^*} + \lambda\bar{\lambda} I$$

2. korak:

$$B^*B = BB^* \overset{?}{\Longrightarrow} \ker B = \ker B^*$$

$$\Downarrow$$

$$\ker B^*B = \ker BB^*$$

$$\ker B^*B = \ker B, \quad \ker BB^* = \ker B^*$$

3. korak: $\ker B = \ker B^* \Longrightarrow (Av = \lambda v \Leftrightarrow A^* v = \bar{\lambda} v \quad \forall v \in V)$

$\square$

NORMALNE MATRIKE

Def: A je normalna $\Leftrightarrow$ $A^* A = A A^*$.

Očitno je vsaka normalna matrika kvadratna.

Dokazali smo že, da za normalne matrike velja, da imata A in A^* iste lastne vektorje, kar v splošnem ne velja.

Dokažimo še dve lastnosti:

Trditev: lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim normalne matrike, so paroma ortogonalni.

Dokaz: Naj $Au = \lambda u$ in $Av = \mu v$ in $\lambda \neq \mu$ in A normalna.

$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$ (std. skal. prod.)

$$\mu \langle u, v \rangle = \langle u, \bar{\mu} v \rangle = \langle u, A^* v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\mu - \lambda)}_{\neq 0,\ \text{ker } \mu \neq \lambda} \langle u, v \rangle = 0 \Longrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

Trditev: Vsako normalno matriko se da diagonalizirati.

Dokaz preko Jordanskih form. Radi bi pokazali, da je Jordanska forma diagonalna $\Leftrightarrow$ vsi korenski podprostori so lastni. $\Leftrightarrow$ $\ker (A - I\lambda)^m = \ker (A - I\lambda)$ $\forall m, \lambda$. Zadošča dokazati za $m=2$.

$m=2$: let $B = A - \lambda I$

zato je $\underbrace{\ker B^2}_{\|\,1.)} \stackrel{?}{=} \ker B$.

1.) Če v $\ker A^*A = \ker A$ vstavimo $A = B^2$, dobimo $\ker B^{2*}B^2 = \ker B^2$.

$\ker (B^2)^* B^2 \stackrel{2.)}{=} \ker (B^*B)^2 =$

2.) Ker je A normalna, je B normalna, dokaz prej. Torej $B^{2*}B^2 = B^*\underbrace{B^*B}_{BB^*}B = B^*B\,B^*B$

$\stackrel{3.)}{=} \ker B^*B \stackrel{4.)}{=} \ker B$

3.) Če v $\ker A^*A = \ker A$ vstavimo $A = B^*B$, dobimo $\ker B^*BB^*B = \ker B^*B$

4.) Spet upoštevamo $\ker A^*A = \ker A$, torej $\ker B^*B = \ker B$.

Iz $\ker B^2 = B$ sledi $\ker B^4 = B$, ko dokažemo B normalna $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ B^2 normalna.

$$(B^2)^* B^2 = B^*B^*BB = BBB^*B^*.$$

torej $\ker B^8 = \ker B^4 = \ker B^2 = \ker B = \ker B^{16} = \dots$

Vemo, da velja $\ker B \subseteq \ker B^2 \subseteq \ker B^3 \subseteq \ker B^4 \subseteq \ker B^5 \subseteq \ker B^6 \subseteq \ker B^7 \subseteq \ker B^8$, kjer $\ker B^2 = \ker B$, $\ker B^4 = \ker B^2 = \ker B$, $\ker B^8 = \ker B^4 = \ker B$ ...

$\Rightarrow \ker B^m = \ker B \;\forall m.$

Povzetek: Za vsako normalno matriko A $\exists$ normalna matrika D in obrnljiva matrika P z ortonormiranimi stolpci, da velja

$$AP = PD$$
$$A = PDP^{-1}$$

D diagonalna. Diagonala D so lastne vrednosti A, stolpci P so lastni vektorji.

lastni podprostori $\ker(A-\lambda_1 I)$, $\ker(A-\lambda_2 I)$, ..., $\ker(A-\lambda_n I)$ so medsebojno pravokotni. Izberimo ONB za vsak lastni podprostor. Unija teh ONB je ONB za F^n.

$$F^n = \ker(A-\lambda_1 I) \oplus \ker(A-\lambda_2 I) \oplus \dots \oplus \ker(A-\lambda_n I)$$

ta ONB so stolpci matrike P.

[ORTOGONALNE/UNITARNE MATRIKE]

let A kvadratna z ON stolpci glede na std. skal. prod.

pravimo, da je A UNITARNA (v kompleksnem primeru)

pravimo, da je A ORTOGONALNA (v realnem primeru)

Dokazi so podobni za $\mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$. Dokazovali bomo za $\mathbb{C}$.

Trditev: za unitarno A velja $A^*A = AA^* = I$

NTS ZOO
hide bar
hide scroll
unpin vscode
sync zapiski

Dokaz: let $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ unitarna

to pomeni, da za vsak stolpec velja:
$\hookrightarrow \forall i,j$:

$$\underbrace{a_{1i}\overline{a_{1j}} + \cdots + a_{ni}\overline{a_{nj}}}_{\text{std. skal. prod.}} \quad \left\langle \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$$

stolpci so ON množica

$$\Longrightarrow \underbrace{A^*}_{\overline{A}^T} A = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ij-ti element te matrike je $\langle \underset{A^*}{i\text{-ta vrstica}}, \underset{A}{j\text{-ti stolpec}} \rangle$

$$(A^*A)_{ij} = \begin{bmatrix} \overline{a_{1i}} & \cdots & \overline{a_{ni}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \overline{a_{1i}}\, a_{1j} + \cdots + \overline{a_{ni}}\, a_{nj} =$$

$$= \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I$$

Vemo $AB = I \Rightarrow BA = I$ $\Longrightarrow$ $A^*A = I \Rightarrow AA^* = I$

$\Rightarrow AA^* = A^*A$

Za nekvadratne velja le $A^*A = I$, ne pa tudi $AA^* = I$

zaradi dimenzij.