Ponovimo: za KRVPSSP:

Vektor v je ortogonalen na množico S, če je ortogonalen na vse elemente množice S.

$(v \perp S \Leftrightarrow \forall s \in S: \langle v, s \rangle = 0)$

Množico vseh vektorjev, ortogonalnih na S, označimo z $S^\perp$ in ji rečemo ortogonalni komplement.

Pokazali smo, da je $S^\perp$ vektorski podprostor.

Izrek o ortogonalnem razcepu:

Naj V KRVPSSP in W vektorski podprostor v V. Potem velja $V = W \oplus W^\perp$ ← ortogonalni razcep V glede na W.

Dokaz: Naj $v \in V$ poljuben. v' naj bo ortogonalna projekcija v na W.

Potem velja, da je: $v = \underbrace{v - v'}_{\text{pravokoten na } W.} + \underbrace{v'}_{\in W}$, torej $v \in W \oplus W^\perp$.

dokaz zadošča ← $\Rightarrow v - v' \in W^\perp$

Zakaj je ta vsota direktna?: $\forall v \in W \cap W^\perp: v \perp v \Leftrightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$.

$W \cap W^\perp = \{0\}$.

(karakterizacija direktnih vsot)

Trditev: Naj V KRVPSSP in naj W vektorski podprostor v V.

Velja $(W^\perp)^\perp = W$.

Dokaz: Po definiciji ortogonalnega komplementa je $W \subseteq (W^\perp)^\perp$, (ker $W \perp W^\perp$).

dokažimo $\dim W = \dim W^{\perp\perp}$

ortogonalni razcep glede na W je $V = W \oplus W^\perp \Rightarrow \dim W + \dim W^\perp = \dim V$

ort. razc. gl. na $W^\perp$ je $V = W^\perp \oplus W^{\perp\perp} = \dim W^\perp + \dim W^{\perp\perp} =$
$= \dim V =$
$= \dim W + \dim W^\perp$ / $- \dim W^\perp$

$\dim W^{\perp\perp} = \dim W$.

$\square$

alternativni dokaz:

Naj $w_1, \dots, w_k$ OB za W.

dopolni jo do OB za V z $w_{k+1}, \dots, w_n$.

opazi: $w_{k+1}, \dots, w_n$ je OB za $W^\perp$.

ker je $w_{k+1}, \dots, w_n$ OB za $W^\perp$ in ker je $w_1, \dots, w_k$ njena dopolnitev do OB W, je $w_1, \dots, w_k$ OB za $W^{\perp\perp}$

$\Rightarrow W^{\perp\perp} = W$, saj imata isti ortogonalni bazi.

[ADJUNGIRANA LINEARNA PRESLIKAVA]

Rieszov izrek o reprezentaciji: (čez nekaj vrstic) „to je tehnična zadeva, potrebna za konstrukcijo adjungirane linearne preslikave"

Def.: Linearni funkcional. Naj V V.P. nad F. Vemo, da je F V.P. nad F. Linearnim preslikavam $V \to F$ pravimo linearni funkcional na V. MI BOMO DELALI LE KRVP, a definicija velja za poljuben V.P.

Primer: let V VPSSP nad $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. let $w \in V$.

let $\varphi: V \to F$ → slika $V \to F$, zato je to linearni funkcional

$v \mapsto \langle v, w \rangle$ preslikava je po aksiomu 3 za skalarni produkt linearna

↳ linearnost v 1. faktorju.

$$\langle \alpha a + \beta b, c \rangle = \alpha \langle a, c \rangle + \beta \langle b, c \rangle$$

BTW velja tudi za NKRVPSSP

Rieszov izrek o reprezentaciji linearnih funkcionalov:

let V KRVPSSP. za vsak linearen funkcional φ na V $\exists$ natanko en vektor $w \in V \ni: \forall v \in V \; \varphi(v) = \langle v, w \rangle$.

zdb.: zgornja konstrukcija nam da vse linearne funkcionale

Dokaz eksistence w: Vzemimo poljubno OB $w_1, \dots, w_n$ za V. (obstaja po Gram-Schmidtu)

$\forall v \in V$: $v = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle v, w_n \rangle w_n$

(Fourierov razvoj po OB).

ker je φ linearna: $\varphi v = \varphi(\langle v, w_1 \rangle w_1 + \dots + \langle v, w_n \rangle w_n) =$

$\overset{\varphi \text{ lin.}}{=} \langle v, w_1 \rangle \varphi w_1 + \dots + \langle v, w_n \rangle \varphi w_n =$

$\overset{\text{konj. hom. v 2. fak.}}{=} \langle v, (\varphi w_1) w_1 \rangle + \dots + \langle v, (\varphi w_n) w_n \rangle =$

$\overset{\text{konj. ad. v 2. fak.}}{=} \langle v, \underbrace{(\varphi w_1) w_1 + \dots + (\varphi w_n) w_n}_{\text{eksplicitna formula za iskani } w} \rangle$

Dokaz enoličnosti w:

PDD $\forall v \in V$: $\varphi(v) = \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$

$\Rightarrow \forall v \in V$: $\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0$

vzemi konkreten $v = w_1 - w_2$:

$\langle w_1 - w_2, w_1 - w_2 \rangle = 0$

$\overset{\text{def. sk.pr.}}{\Rightarrow}$ $w_1 - w_2 = 0$

$w_1 = w_2$ □

Konstrukcija adjungirane linearne preslikave:

začnimo z definicijo: let U, V VPSSP in let $L: U \to V$ linearna

Adj. lin. presl. od L je taka $L^*: V \to U$, ki zadošča

$\forall u \in U, v \in V$: $\underbrace{\langle Lu, v \rangle}_{\text{skal. prod. v } V} = \underbrace{\langle v, L^* u \rangle}_{\text{skal. prod. v } V}$

Dokaz eksistence in enoličnosti od L^*.

- enoličnost. let L^* in L° dve adj. lin. pres za L.

$\Rightarrow \forall u \in U, v \in V$: $\langle Lu, v \rangle = \langle v, L^* u \rangle = \langle v, L^\circ u \rangle$

$\Rightarrow 0 = \langle u, L^* v - L^\circ v \rangle$

vstavi $u = L^* v - L^\circ v$

$\Rightarrow u = 0$ in $L^* v = L^\circ v \;\; \forall v$

• eksistenca: (za KRVPSSP U in V)

naj $v \in V$. definirajmo L^*v.

1. korak: vpeljimo lin. funkcional:

$$\varphi: U \to F$$
$$u \mapsto \langle Lu, v\rangle \quad (***)$$

prepričajmo se, da je to lin. funk.:

$$\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \overset{\text{def } \varphi}{=} \langle L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v\rangle \overset{L\ \text{lin}}{=}$$
$$= \langle \alpha_1 L u_1 + \alpha_2 L u_2, v\rangle \overset{\langle \cdot,\cdot\rangle\ \text{lin}}{=} \alpha_1 \langle Lu_1, v\rangle + \alpha_2 \langle Lu_2, v\rangle =$$
$$\overset{\text{def } \varphi}{=} \alpha_1 \varphi u_1 + \alpha_2 \varphi u_2 \quad \checkmark$$

2. korak: uporabimo Rieszov izrek za funkcional φ

$$\Longrightarrow \exists!\, w \in U \ni: \forall u \in U: \varphi u \overset{(**)}{=} \langle u, w\rangle$$

3. korak: vpeljimo $L^*v \overset{(*)}{=} w$. S tem definiramo L^* za vsak v.

Dokaz linearnosti preslikave L^*: (linearnost iz konstrukcije ni očitna)

$$L^*(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) \overset{?}{=} \beta_1 L^* v_1 + \beta_2 L^* v_2$$

naj $u \in U$ poljuben.

$$\langle u, L^*(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) - \beta_1 L^* v_1 - \beta_2 L^* v_2 \rangle =$$

$$\overset{\text{konj. lin. 2. faktor}}{=} \langle u, L^*(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)\rangle - \overline{\beta_1}\langle u, L^* v_1\rangle - \overline{\beta_2}\langle u, L^* v_2\rangle =$$

$$\overset{\text{def } \varphi}{=} \langle Lu, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\rangle - \overline{\beta_1}\langle Lu, v_1\rangle - \overline{\beta_2}\langle Lu, v_2\rangle =$$

$$\langle u, L^* v\rangle \overset{(*)}{=} \langle u, w\rangle \overset{(**)}{=} \varphi u \overset{(***)}{=} \langle Lu, v\rangle$$

$$= \cancel{\overline{\beta_1}\langle Lu, v_1\rangle} + \cancel{\overline{\beta_2}\langle Lu, v_2\rangle} - \cancel{\overline{\beta_1}\langle Lu, v_1\rangle} - \cancel{\overline{\beta_2}\langle Lu, v_2\rangle} = 0$$

ker to velja $\forall u$, velja tudi za $u = L^*(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) - \beta_1 L^* v_1 - \beta_2 L^* v_2$

torej $\langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = \vec{0} \Longrightarrow L^*(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 L^* v_1 + \beta_2 L^* v_2$

linearnost ✓

Primer: naj A $m \times n$ matrika nad F.

lin. presl.: $L_A: F^n \longrightarrow F^m$
$$v \longmapsto Av$$

kaj je L_A^*? odgovor je odvisen od izbire skal. prod.

pa vzemimo std. skal. prod. v F^n in F^m, se izkaže $(L_A)^*: F^m \to F^n$ definirana

z $v \mapsto A^* v$, kjer $A^* = (A^T$ z vsemi elementi konjugiranimi$)$.

[MATRIKA ADJUNGIRANE LINEARNE PRESLIKAVE]

naj U, V kvpssp. naj $\overbrace{u_1, \dots, u_n}^{B}$ ONB za U in $\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{C}$ ONB za V.

vzemimo linearno preslikavo $L: U \to V$. kakšna nas zveza med matrikama

L in L^* glede na bazi B in C.

$$L: \underset{B}{U} \longrightarrow \underset{C}{V} \qquad [L]_{C\leftarrow B}$$

$$L^*: \underset{C}{V} \longrightarrow \underset{B}{U} \qquad [L^*]_{B\leftarrow C}$$

Izračunajmo $[L]_{C\leftarrow B}$

Fourierov razvoj

$$Lu_1 = \langle Lu_1, v_1\rangle v_1 + \dots + \langle Lu_1, v_m\rangle v_m$$
$$\vdots$$
$$Lu_n = \langle Lu_n, v_1\rangle v_1 + \dots + \langle Lu_n, v_m\rangle v_m$$

$$[L]_{C\leftarrow B} \begin{bmatrix} \langle Lu_1,v_1\rangle & \dots & \langle Lu_n,v_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle Lu_1,v_m\rangle & \dots & \langle Lu_n,v_m\rangle \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{velja}\\ \langle Lu,v\rangle = \langle u,L^*v\rangle}}{=} \begin{bmatrix} \langle u_1,L^*v_1\rangle & \dots & \langle u_n,L^*v_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_1,L^*v_m\rangle & \dots & \langle u_n,L^*v_m\rangle \end{bmatrix}$$

nadaljujem spodaj

Izračunajmo $[L^*]_{B\leftarrow C}$

Fourierov razvoj

$$L^*v_1 = \langle L^*v_1, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle L^*v_1, u_n\rangle u_n$$
$$\vdots$$
$$L^*v_m = \langle L^*v_m, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle L^*v_m, u_n\rangle u_n$$

$$[L^*]_{B\leftarrow C} = \begin{bmatrix} \langle L^*v_1,u_1\rangle & \dots & \langle L^*v_m,u_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle L^*v_1,u_n\rangle & \dots & \langle L^*v_m,u_n\rangle \end{bmatrix}$$

$$[L]_{C\leftarrow B} \begin{bmatrix} \langle Lu_1,v_1\rangle & \dots & \langle Lu_n,v_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle Lu_1,v_m\rangle & \dots & \langle Lu_n,v_m\rangle \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{velja}\\ \langle Lu,v\rangle = \langle u,L^*v\rangle}}{=} \begin{bmatrix} \langle u_1,L^*v_1\rangle & \dots & \langle u_n,L^*v_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle u_1,L^*v_m\rangle & \dots & \langle u_n,L^*v_m\rangle \end{bmatrix} \underset{\substack{\text{nadaljujem}\\ \text{velja}\\ \langle a,b\rangle = \overline{\langle b,a\rangle}}}{=} \begin{bmatrix} \overline{\langle L^*v_1,u_1\rangle} & \dots & \overline{\langle L^*v_1,u_n\rangle} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\langle L^*v_m,u_1\rangle} & \dots & \overline{\langle L^*v_m,u_n\rangle} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\left([L^*]_{B\leftarrow C}\right)^T \text{ z vsemi elementi konjugiranimi}\right)$$

Oznake: za $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ je $\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \dots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$

in $A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}$

torej $[L^*]_{B\leftarrow C} = \left([L]_{C\leftarrow B}\right)^* =$

OPOMBA: $\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^* v\rangle$ tako izgleda ta lastnost?

let $u \in F^n$ in $v \in F^m$ in $A = m \times n$ matrika

$$\langle Au, v\rangle \overset{?}{=} \langle u, A^* v\rangle$$

$\hookrightarrow$ = velja za standardna skalarna produkta v F^n in F^m.

Pa preverimo:

$$\langle u, v\rangle = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \dots + u_n\bar{v}_n =$$

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$$= [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = v^* \cdot u$$

$\hookrightarrow$ matrično

$$\langle Au, v\rangle = v^* A u$$

$\|$ saj upoštevamo $(A^* v)^* = v^* \underbrace{A^{**}}_{A} = v^* A$

$$\langle u, A^* v\rangle = (A^* u)^* u$$