VEKTORSKI PROSTORI S SKALARNIM PRODUKTOM

1.) Uvod: pojem skal. prod. bi radi razširili na vse vektorske prostore. Žal to ne gre. Zategadelj se omejimo na realne in kompleksne vektorske prostore.
Definiciji za $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ se malce razlikujeta.
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ pdj

NAČRT: povejmo definicij in nekaj primerov.

OPOMBA
Kasneje se bo izkazalo tudi dejstvo, da imamo v v.p. $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$ več skal. prod., pravzaprav celo neskončno.

Definicija realnega vektorskega prostora s skalarnim produktom.
Naj V realen neničen končno razsežen vektorski prostor.
preslikava $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ je skalarni produkt, če zadošča naslednjim lastnostim:

1.) $\langle v, v \rangle > 0$ za vsak neničeln $v \in V$ (pozitivna definitnost)
2.) $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$ za vse $u, v \in V$ (simetričnost)
3.) $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$ (linearnost v prvem faktorju)
$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ in $\forall v, u_1, u_2 \in V$

POSLEDICA:
- Linearnost v 2. faktorju:
$$\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle \overset{2.)}{=} \langle \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2, u \rangle \overset{3.)}{=} \beta_1 \langle v_1, u \rangle + \beta_2 \langle v_2, u \rangle \overset{2}{=} \beta_1 \langle u, v_1 \rangle + \beta_2 \langle u, v_2 \rangle$$
- skalarni produkt z 0:
$$\underset{\substack{\text{aks. vek. prost.}\\ 0\cdot v = 0}}{\langle 0, v \rangle =} \langle 0\cdot v + 0 \cdot v, v \rangle = 0 \langle v, v \rangle + 0 \langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow \langle v, 0 \rangle = 0$$
- alternativna formulacija 1:
$\langle v, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in V$ in $\langle v, v \rangle = 0$, potem $v = 0$

DOKAZ alt form 1:
$1 \Longrightarrow$ alt 1:
1 pravi $v \neq 0 \Rightarrow \langle v, v \rangle > 0$
negacija 1: $\langle v, v \rangle \leq 0 \Rightarrow v = 0$
$1 \Longleftarrow$ alt 1:
alt 1 pravi $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
in
$\langle v, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in V$
$\Downarrow$
$\langle v, v \rangle > 0$ če $v \neq 0$

NTS
$I^{-1} \overset{?}{=} (AA^{-1})^{-1}$
$AA^{-1} = I$
$(AA^{-1})^{-1} AA^{-1} = (AA^{-1})^{-1} I = I^{-1} I = I$
$(AA^{-1})^{-1} I = I$
$(AA^{-1})^{-1} = I$
?
$A^{-1} A = I$

Primeri: $\mathbb{R}^n$ s standardnim skal. prod.:
$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \rangle = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$
primer nestand. skal. prod. v $\mathbb{R}^n$:
Naj $\gamma_1 > 0, \dots, \gamma_n > 0$ poljubni in definirajmo
$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \rangle = \gamma_1 \alpha_1 \beta_1 + \dots + \gamma_n \alpha_n \beta_n$$
neskončno razsežen primer:
Naj $V = C[a,b]$ ~ zvezne fje iz $[a,b]$ v realna števila
$f, g \in V$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$
zveznost rabimo v dokazu aksioma 1 sicer za nezvezno fjo, ki ni 0,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0 & \text{drugače} \end{cases},$$
$$\int_a^b f^2(x)\, dx = 0$$

$\leadsto$ to je standardni skalarni produkt v $C[a,b]$
nestandarden skal. prod v $C[a,b]$
Naj $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna, ki zadošča $w(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$
$\forall f, g \in V$: $\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) g(x) w(x)\, dx$

OPOMBA: Vektorski prostor s skalarnim produktom je $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, kjer je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skal. prod. na V.

↳ to je vektorski prostor, na katerem izberemo in fiksiramo skalarni produkt

Definicija kompleksnega vektorskega prostora s skalarnim produktom:
Let V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Preslikava $\langle \cdot,\cdot \rangle : V\times V \to \mathbb{C}$, $(v_1,v_2)\mapsto \langle v_1,v_2\rangle$ je skalarni produkt, če velja:

1.) $\forall v\in V: \quad v\neq 0 \Leftrightarrow \langle v,v\rangle > 0$ enako kot v $\mathbb{R}$

2.) $\forall v,u\in V: \quad \langle v,u\rangle = \overline{\langle u,v\rangle}$ opomba: $z=a+bi$, $\bar z = a-bi$ (drugače kot v $\mathbb{R}$)

3.) $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v\rangle = \alpha_1\langle u_1,v\rangle + \alpha_2\langle u_2,v\rangle \quad \forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}\ \forall u,v_1,v_2\in V$
(enako kot v $\mathbb{R}$)

$\overline{zw} = \bar z\,\bar w$
$\overline{z+w} = \bar z + \bar w$
$z\bar z = |z|^2$

posledice aksiomov:
- KONJUGIRANA linearnost v drugem faktorju

$$\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\rangle \overset{2.)}{=} \overline{\langle \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2, u\rangle} \overset{1.)}{=} \overline{\beta_1\langle v_1,u\rangle + \beta_2\langle v_2,u\rangle} =$$
$$= \overline{\beta_1}\,\overline{\langle v_1,u\rangle} + \overline{\beta_2}\,\overline{\langle v_2,u\rangle} = \overline{\beta_1}\langle u,v_1\rangle + \overline{\beta_2}\langle u,v_2\rangle$$

Pomni: $\langle \alpha v,u\rangle = \alpha\langle v,u\rangle$, ampak $\langle v,\alpha u\rangle = \bar\alpha\langle v,u\rangle$
↳ 1. faktor ↳ navadna α 2. faktor konjug. α

- kot prej: $\langle v,0\rangle = \langle 0,v\rangle = 0$
- alternativna formulacija 1:
$\forall v\in V: \langle v,v\rangle \geq 0$ in $\forall v\in V: \langle v,v\rangle > 0 \Rightarrow v=0$

Primer: standardni skal. prod. na $\mathbb{C}^n$
$$\langle (\alpha_1,\dots,\alpha_n),(\beta_1,\dots,\beta_n)\rangle = \alpha_1\overline{\beta_1} + \dots + \alpha_n\overline{\beta_n}$$
nestandardni skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$ za neko $\gamma_1>0,\dots,\gamma_n>0$
$$\langle (\alpha_1,\dots,\alpha_n),(\beta_1,\dots,\beta_n)\rangle = \gamma_1\alpha_1\overline{\beta_1} + \dots + \gamma_n\alpha_n\overline{\beta_n}$$

neskončni vekt. prost. na $\mathbb{C}$:
$V = C([a,b],\mathbb{C})$
Ψ
$f = g + ih$; $g,h \in C[a,b]$ ↗ zvezne f-je $[a,b]\to\mathbb{R}$, $\Uparrow$ $\mathbb{R}^2$

$$\int_a^b fx\,dx = \int_a^b gx\,dx + i\int_a^b hx\,dx$$

$$\langle f_1,f_2\rangle = \int_a^b \underset{g_1+ih_1}{f_1x}\,\underset{g_2+ih_2}{\overline{f_2x}}\,dx = \int_a^b (g_1g_2 + h_1h_2)x\,dx + i\int_a^b (h_1g_2 - g_1h_2)x\,dx$$

nestandardno: spet isto z utežmi.

[NORMA] let V vektorski prostor s skal. prod
$\forall v\in V: \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ (definicija norme)

osnovne lastnosti norme:
1.) $\|v\|>0 \Leftrightarrow v\neq 0$ in $\|0\|=0$
↳ sledi iz aksioma skal. prod. 1

2.) $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$ za vsak $\alpha\in F$ in $v\in V$
↳ $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ (samo ta sva definirali skal. prod)

3.) trikotniška neenakost:
$\forall u,v\in V: \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (sledi iz Cauchy-Schwarzove neenakosti na običajen način

Trditev: (Cauchy-Schwarz)

$\forall u,v \in V$: $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$

V vek. prost. s sk. prod.

Dokaz: $v=0$: $0=0$

$v \neq 0$: definiramo $w = u - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v$

po 1.) velja:

$0 \leq \langle w,w\rangle = \langle w, u - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v\rangle =$

$= \langle w,u\rangle - \frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{\langle v,v\rangle} \underbrace{\langle w,v\rangle}_{\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\langle v,v\rangle = 0} = \langle w,u\rangle =$

$\stackrel{3}{=} \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\|u\|^2} - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}\langle v,u\rangle =$

$= \|u^2\| - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v^2\|}$

$\Downarrow$

$0 \leq \|u\|^2 - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2}$

$\frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2} \leq \|u\|^2 \quad /\cdot \|v\|^2$

$|\langle u,v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \quad /\sqrt{\ }$

$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\| \quad \square$

A lahko z normo izrazimo skalarni produkt?

JA!

v $\mathbb{R}$: $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$

v $\mathbb{C}$: $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|u+i^k v\|^2$

Dokaz v $\mathbb{C}$:

$\sum_{k=0}^{3} i^k \underbrace{\|u+i^k v\|^2}$

$\langle u+i^k v, u+i^k v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u, i^k v\rangle} + \langle i^k v, u\rangle + \langle i^k v, i^k v\rangle$

$= \langle u,u\rangle + \overline{(i^k)}\langle u,v\rangle + i^k\langle v,u\rangle + \underbrace{i^k\overline{(i^k)}}_{1}\langle v,v\rangle$

$= \underbrace{\sum_{k=0}^{3} i^k \langle u,u\rangle}_{0} + \sum_{k=0}^{3} i^k\cdot(-i^k)\langle u,v\rangle + \underbrace{\sum_{k=0}^{3} i^k\, i^k\langle v,u\rangle}_{0} + \underbrace{\sum_{k=0}^{3} i^k\langle v,v\rangle}_{} =$

kar ti: $\sum_{k=0}^{3} i^{2k} = 0$ $\quad \sum_{k=0}^{3} i^k = 1+i+(-1)+(-i) = 0$

$$= \sum_{t=0}^{3} i^t \underbrace{(-i^t)}_{1} \langle u,v \rangle = 4\langle u,v \rangle \quad \square$$

ORTOGONALNE MNOŽICE in ORTOGONALNE BAZE

$\forall v,u \in \mathbb{R}^2: \ v \perp u \Leftrightarrow \langle v,u \rangle = 0$

Za splošne vektorske prostore (saj nimamo geometrijskega pomena) s skalarnim produktom (VPSSP) definiramo:

$u \perp v \Leftrightarrow \langle u,v \rangle = 0$

Splošne opombe: $\forall v \in V: \ v \perp \vec{0}$

$\forall v \in V: \ v \neq 0 \Leftrightarrow v \not\perp v$ (aksiom 1 za skal. prod.)

$\forall v,u \in V: \ u \perp v \Leftrightarrow v \perp u$

Def. množic:

Let V VPSSP in $v_1, \dots v_k \in V$. • $\{v_1, \dots v_k\}$ je ortogonalna,

če • vsi $v_1, \dots v_k \neq \vec{0}$

• $\forall i,j;\ i \neq j \Rightarrow v_i \perp v_j \Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0$

• $\{v_1, \dots, v_k\}$ je normirana,

če • $\|v_1\| = \|v_2\| = \dots = \|v_k\| = 1$

• $\{v_1, \dots, v_k\}$ je ortonormirana,

če je tako normirana kot tudi ortogonalna.

opomba: kako iz ortogonalne množice $\{v_1, \dots v_k\}$ dobimo normirano? Vse elemente delimo z njihovo normo: $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|} \right\}$ je torej ortonormirana.

Trditev: vsaka ortogonalna množica je linearno neodvisna.

Dokaz: Recimo, da je $\{v_1, \dots, v_k\}$ ortogonalna. Vzemimo

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \quad \exists: \ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0.$

$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\vdots$

$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_k \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$

$\alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{\neq 0} + \dots + \alpha_k \underbrace{\langle v_k, v_1 \rangle}_{0} = 0$

$\vdots$

$\alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_k \rangle}_{\neq 0} + \dots + \alpha_k \underbrace{\langle v_k, v_k \rangle}_{\neq 0} = 0$

$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

$\square$

Ni pa vsaka ortogonalna množica ogrodje. Množice, ki so ortogonalne in so ogrodje, rečemo ORTOGONALNE BAZE.

ortonormirana baza je ortogonalna baza, ki je normirana.

Izreki

Vsak KRVPSSP ima ortonormirano bazo.

Dokaz prihodnjič.