Ponovimo: dokazali smo izrek o korenskem razcepu.

$$W_1 \oplus \dots \oplus W_k = \mathbb{C}^n$$

$W_i = \ker(A - \lambda_i I)^{r_i}$, kjer je r_i stopnja ničle λ_i v $m_A(x)$.

Ostalo nam je še, da je $W_i \cap W_j = \{0\}$, če $i \neq j$.

Pokažimo, da je W_i invarianten za A, t.j. $v \in W_i \Rightarrow Av \in W_i$:

če je $v \in W_i$, tedaj $(A - \lambda_i I)^{r_i} v = 0 \quad | \cdot A$

$$A (A - \lambda_i I)^{r_i} \cdot v = 0$$

$$(A - \lambda_i I)^{r_i} Av = 0$$

$$\Downarrow$$

$$Av \in \ker (A - \lambda_i I)^{r_i}$$

$$\Downarrow$$

$$Av \in W_i$$

Ker so vsi W_i invariantni za A, so tudi njihovi preseki invariantni za A. Definirajmo torej lin. preslikavo:

$$L : W_i \cap W_j \longrightarrow W_i \cap W_j$$
$$v \longmapsto Av$$

Vemo, da ima L vsaj eno lastno vrednost λ in pripadajoči lastni vektor w.

$w \in W_i \cap W_j$ in $\underset{\substack{\| \\ Av}}{Lw} = \lambda w$

$\Rightarrow p(A)w = p(\lambda w)$ za vsak polinom p.

Velja
$Av = \lambda v \Rightarrow$
$A^i v = \lambda^i v \Rightarrow$
$p(A)v = p(\lambda)v$

Če $p(x) = (x - \lambda_i)^{r_i}$, dobimo $(A - \lambda I)^{r_i} w =$

$$= (\lambda - \lambda_i)^{r_i} \underset{\substack{\neq \\ 0}}{w} \Rightarrow$$

$$(\lambda - \lambda_i)^{r_i} = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_i$$

Če $p(x) = (x - \lambda_j)^{r_j}$, dobimo $\dots \Rightarrow \lambda = \lambda_j$

od tod sledi, da je $\lambda_i = \lambda_j$ ↯ protislovje s tem, da so $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paroma različne

$\Longrightarrow$ vsota korenskih podprostorov je direktna

opomba: v splošnem ne velja $U_i \cap U_j = \{0\}$
$$\Downarrow$$
$U_1 + \dots + U_k$ je direktna

JORDANSKA KANONIČNA FORMA

Če matrika A ni podobna diagonalni matriki, katera je naslednja najpreprostejša matrika, podobna njej?

Vemo: A je vedno podobna neki zgornjetrikotni matriki.

Smisel JKF je to izboljšati. Vsaka matrika je podobna posebni zgornjetrikotni matriki, ki ji pravimo JKF. To je bločno-diagonalna matrika, ki ima za diagonalne bloke matrike oblike:

(cont.)

$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{bmatrix}$ (jordanska kletka)

jordanska matrika je sestavljena iz jordanskih kletk po diagonali:

$\begin{bmatrix}J_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & J_m\end{bmatrix}$, kjer so J_i jordanske kletke.

običajno zahtevamo še, da JK, ki imajo isto lastno vrednost, sedijo skupaj in so urejene po velikosti od največje do najmanjše.

Primer Jordanske matrike z lastnimi vrednostmi $\{2,0\}$:

$$\begin{bmatrix}
\begin{smallmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{smallmatrix} &&&&&&&& \\
& \begin{smallmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{smallmatrix} &&&&&&& \\
&& \begin{smallmatrix}2&1\\0&2\end{smallmatrix} &&&&&& \\
&&& 2 &&&&& \\
&&&& 2 &&&& \\
&&&&& \begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix} &&& \\
&&&&&& \begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix} && \\
&&&&&&& 0 & \\
&&&&&&&& 0
\end{bmatrix}$$

Izrek o JKF: za vsako kvadratno kompleksno matriko $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ obstaja taka jordanska matrika J in taka obrnljiva matrika P, da velja $A = PJP^{-1}$

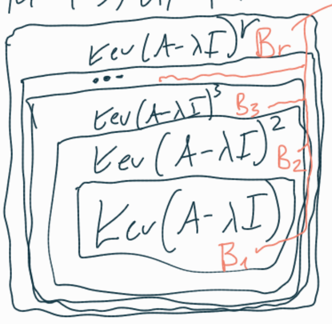
„jordanifikacija"

zato vsaka $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ je podobna eni Jordanski matriki.

KAKO KONSTRUIRAMO J in P ??

izračunamo lastne vrednosti in pripadajoče korenske podprostore podan z bazo podprostorov

let λ lastna vrednost od A. izračunamo lastne vektorje in lastni podprostor: → baze podprostorov



izračunamo pomožne baze od $\ker(A-\lambda I)^i$ za $i = 1,\dots,r$.

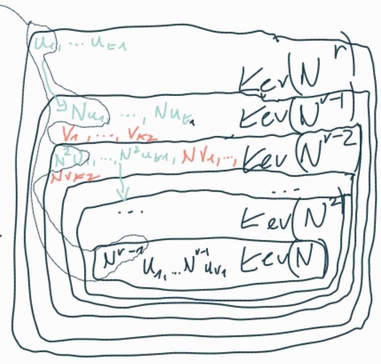
nato pomožne baze popravljamo.

pišimo $N = A - \lambda I$

1.) Pomožno bazo B_{r-1} dopolnimo do baze $\ker(N^r)$ z elementi iz B^r. To dopolnitev naj bo $u_1,\dots u_{k_1}$.

Jordanska veriga je stolpec

lepši prikaz stolpcev (slika table) na http://upload.4a.si/d/jordan.jpg



2.) Preslikamo dopolnitev z N in dobimo $Nu_1,\dots,Nu_{k_1} \in (\ker N)^{r-1}$

3.) opazimo, da je $B_{r-2} \cup \{Nu_1,\dots,Nu_{k_1}\}$ LN množica.

$B_{r-2} \cup \{Nu_1,\dots Nu_{k_1}\}$ dopolnimo do baze $\ker(N^{r-1})$ to dopolnitev označimo z $v_1,\dots v_{k_2}$.

4.) Preslikamo $Nu_1,\dots,Nu_{k_1}, v_1,\dots,v_{k_2}$ z N in dobimo

$N^2u_1,\dots,N^2u_{k_1}, Nv_1,\dots,Nv_{k_2} \in \ker(N^{r-1})$

5.) opazimo, da je $B_{r-3} \cup \{N^2u_1,\dots,N^2u_{k_1}, Nv_1,\dots,Nv_{k_2}\}$ LN

dopolnimo do baze $\ker(N^{r-2})$ z elementi $w_1,\dots,w_{k_3}$

$\underset{A-\lambda I}{\swarrow} N \cdot N^{r-1} u_1 = 0 \Rightarrow A N^{r-1} u_1 = \lambda N^{r-1} u_1$

$N \cdot N^{r-2} u_1 = N^{r-1} u_1 \Rightarrow A N^{r-2} u_2 = N^{r-1} u_1 + \lambda N^{r-2} u_2$

$\vdots$

$N u_1 = N u_1 \Rightarrow A u_1 = \dots N u_1 + \lambda u_1$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} u \in \ker N^r & \Rightarrow & N u \in \ker N^{r-1} \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ N^r u = 0 & \Rightarrow & N^{r-1} N u = 0 \end{array} \right.$$

to pomeni, da je $A \overbrace{\begin{bmatrix} N^{r-1} u_1 & N^{r-2} u_1 & \dots & N u_1 \end{bmatrix}}^{\text{prva jordanska veriga za } \lambda} =$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} N^{r-1} u_1 & N^{r-2} u_1 & \dots & u_1 \end{bmatrix}}_{r \text{ stolpcev}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \end{bmatrix}}_{\text{prva jordanska kletka za } \lambda} \rightarrow r \times r$$

r je stopnja $(x-\lambda)$ v $m_A(x)$

$\Downarrow$

ni kvadratna matrika

$A P_1 = P_1 J_1$

$\vdots$

$A P_m = P_m J_m$

Ponavljamo, dokler ne porabimo vseh jordanskih mask vseh lastnih vrednosti

$$P = \begin{bmatrix} P_1, & \dots & P_j \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{bmatrix}$$

Primer: poišči Jordansko matriko, ki je podobna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$p_A(x) = \det(A - xI) =$

$(-x)(2-x)^3 = x(x-2)^3$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$

$n_1 = 1 \quad n_2 = 3$

Lastni vektorji: $\ker(A - 0I) = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\ker(A - 2I) = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

imamo le 3 lastne vektorje, ne štirih $\mathbb{C}^4$, se matrike ne da diagonalizirati torej moramo začeti z računanjem korenskih podprostorov.

$\ker(A - 0I)^2 = \ker A^2 \overset{n_1 = 1}{=} \ker A$

$\ker(A - 2I)^2 = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$\ker(A - 2I)^3 = \ker(A - 2I)^2$

$\hookrightarrow n_2 = 3$

dim. kor. podp. je stopnja last. vredn.

$\mathbb{C}^4$

$\boxed{\ker(A - 2I) = \text{Lin}\overbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}^{B_1}}$

$\ker(A - 2I)^2 = \text{Lin}\underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}_{B_2}$

$\boxed{\ker(A - 0I) = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$

$\lambda = 2$

$\lambda = 0$

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix} \xrightarrow{(A-2I)} Nu_1 = \begin{bmatrix}2\\4\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}3\\0\\-2\\2\end{bmatrix} = v_1 \qquad \boxed{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}$$

jordanska veriga

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1×1 $\quad 2\times 2$ $\quad 1\times 1$

Funkcije matrik

Ideja: kako izračunamo A^n, $\sin A$, $\exp A$, ...

- kako izračunamo A^n (potenca A)?

1) A jordanificiramo: dobimo P in J: $A = PJP^{-1}$

$$\Rightarrow A^n = PJ\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{I}J\underbrace{P^{-1} \cdot}_{I} \cdots \underbrace{\cdot}_{I} PJP^{-1} = PJ^nP^{-1}$$

če je $J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{bmatrix}$, je $A^n = P\begin{bmatrix} J_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & J_m^n \end{bmatrix}P^{-1}$

kako potenciramo jordansko kletko?

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix}^n = \Big(\lambda I + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}}_{N}\Big)^n =$$

komutirata, uporabimo binomsko formulo, kajti $IN = NI$

$$= (\lambda I + N)^n = \binom{n}{0}(\lambda I)^n N^0 + \binom{n}{1}(\lambda I)^{n-1}N^1 + \dots + \binom{n}{n}(\lambda I)^0 N^n =$$

$$= \binom{n}{0}\lambda^n I + \binom{n}{1}\lambda^{n-1}N + \dots + \binom{n}{n}N^n$$

kako potenciramo matriko N?

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SLEDI:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix}^n}_{r\times r} = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{r-1}\lambda^{n-r+1} \\ & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \vdots \\ & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ & & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

za $n \geq r$, drugače dobiš le prvih nekaj naddiagonal

¿ Kako izračunaš $\exp A$?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n}{n!}\right)P^{-1} =$$

$$= P \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_1^n}{n!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_m^n}{n!} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_m} \end{bmatrix} P$$

Kako izračunaš exp(Jordanove kletke)?

Let $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$, tedaj je

$$f(J) = \begin{bmatrix} f\lambda & f'\lambda & \frac{f''\lambda}{2!} & \cdots & f^{(r-1)}\lambda/(r-1)! \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''\lambda}{2!} \\ & & & \ddots & f'\lambda \\ & & & & f\lambda \end{bmatrix}$$