Cayley–Hamiltonov izrek:

$p_A(x)$ -- karakteristični polinom anhilira matriko A.

$$p_A(A)=0$$

$$p_A(x)=\det(A-xI)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

$$p_A(A)=\det(A-AI)=\det 0=0$$

Dokaz:

spomnimo se: $B^{-1}=\frac{1}{\det B}\left(\tilde{B}\right)^T$

$$b_{ij}\to(-1)^{i+j}\det B_{ij} \qquad /\cdot(\det B)B$$

$$(\det B)I=B\left(\tilde{B}\right)^T \qquad \text{vstavi } B=(A-XI)$$

$$\underbrace{\det(A-XI)}_{p_A(x)}\cdot I=(A-XI)\left(\widetilde{A-XI}\right)^T$$

torej: $\left(\widetilde{A-xI}\right)^T$ = $n\times n$ matrika, ki vsebuje polinome stopnje ≤ 1

$$=B_0+B_1x+\dots+B_{n-1}x^{n-1} \qquad B_i\in M_n(\mathbb{C})$$

$$p_A(x)=\det(A-xI)=c_0+c_1x+\dots+c_nx^n\in\mathbb{C}(x)$$

- $\det(A-xI)\cdot I=p_A(x)\cdot I=c_0I+c_1Ix+\dots+c_nIx^n$
- $(A-xI)\left(\widetilde{A-xI}\right)^T=(A-xI)(B_0+B_1x+B_2x^2+\dots+B_{n-1}x^{n-1})=$

$$=AB_0+AB_1x+\dots+AB_{n-1}x^{n-1}$$
$$-xB_0-\dots-B_{n-2}x^{n-1}-B_{n-1}x^n$$

Primerjamo koeficiente obeh polinomov:

$1:\quad c_0I=AB_0$

$x:\quad c_1I=AB_1-B_0$

$x^2:\quad c_2I=AB_2-B_1$

$\vdots$

$x^{n-1}:\quad c_{n-1}I=AB_{n-1}-B_{n-2}$

$x^n:\quad c_nI=-B_{n-1}$

$$\underbrace{c_0I+c_1A+c_2A^2+\dots+c_{n-1}A^{n-1}+c_nA^n}_{p_A(A)}=\cancel{AB_0}+\cancel{A^2B_1}-\cancel{AB_0}+$$
$$+A^3B_2-\cancel{A^2B_1}+\dots+$$
$$+\cancel{A^nB_{n-1}}-A^{n-1}B_{n-2}$$
$$-\cancel{A^nB_{n-1}}=0$$

MINIMALNI POLINOM IN DIAGONALIZABILNOST

Kako iz $m_A(x)$ ugotovimo ali se da matriko diagonalizirati (a je podobna kakšni diag. matriki?)?

IZREK: matriko A se da diagonalizirati $\Leftrightarrow$ $m_A(x)$ ima samo enostavne ničle.

$(x-\lambda_1)^1\cdots(x-\lambda_k)^1$ za paroma različne λ. (potence so vse 1) ↳ ne večkratne

DOKAZ: ($\Longrightarrow$): A je podobna diag. matriki: $A = PDP^{-1}$ ↳ diag. ↳ obrn.

BSŠ: $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix}$ $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_k$

$$(D-\lambda_1 I)(D-\lambda_2 I)\cdots(D-\lambda_k I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & (\lambda_2-\lambda_1) I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_k-\lambda_1) I_{n_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda_1-\lambda_2) I_{n_1} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_k-\lambda_2) I_{n_k} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} (\lambda_1-\lambda_k) I_{n_1} & & & \\ & (\lambda_2-\lambda_k) I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

torej $(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_k I) = (PDP^{-1} - \lambda_1 \underset{PP^{-1}}{I})(PDP^{-1} - \lambda_2 \underset{PP^{-1}}{I})\cdots(PDP^{-1} - \lambda_k \underset{PP^{-1}}{I}) =$

$= P(D-\lambda_1 I)\cancel{P^{-1}}\,\cancel{P}(D-\lambda_2 I)\cancel{P^{-1}} \cdots \cancel{P}(D-\lambda_k I)P^{-1} =$

$= P\underbrace{(D-\lambda_1 I)\cdots(D-\lambda_k I)}_{0}P^{-1} = 0$ torej polinom anhilira A.

ker $(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k) \mid m_A(x)$ (ničle m_A),

velja $(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k) = m_A(x)$

Lema 1: $n(AB) \leq n(A) + n(B)$ $\forall$ matrike A, B

$n(X) = \dim \operatorname{Ker}(X)$

OGLEJMO SI PRESLIKAVO: $L: \operatorname{Ker} AB \to \operatorname{Ker} A$, $x \mapsto Bx$

je dobro definirana: $x \in \operatorname{Ker} AB \Rightarrow ABx = 0 \Rightarrow Bx \in \operatorname{Ker} B$

osnovni izrek za preslikavo L:

$$\underset{\geq \dim \operatorname{Ker} B}{\dim \operatorname{Ker} L} + \underset{\leq \dim \operatorname{Ker} A}{\dim \operatorname{Im} L} = \dim \operatorname{Ker} AB$$

$Lx=0 \Rightarrow Bx=0$; velja $\operatorname{Ker} L \subseteq \operatorname{Ker} B$ in $\dim \operatorname{Ker} L \leq \dim \operatorname{Ker} B$

$\operatorname{Im} L \subseteq \operatorname{Ker} A \rightarrow \dim \operatorname{Im} L \leq \dim \operatorname{Ker} A$

torej je res $\dim \operatorname{Ker} AB \leq \dim \operatorname{Ker} B + \dim \operatorname{Ker} A$.
s popolno indukcijo lahko to posplošimo na več faktorjev

↳ $n(A_1 \cdots A_k) \leq nA_1 + \ldots + nA_k$

Lema dokazana.

dokaz ($\Longleftarrow$): Recimo, da $(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$ anhilira A.

upoštevamo:

$$n(\underbrace{(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_k I)}_{0}) \leq n(A-\lambda_1 I) + \ldots + n(A-\lambda_k I)$$

$$\underset{n_1+\ldots+n_k}{n} \leq \underbrace{m_1 + \ldots + m_k}_{\text{geometrijske večkratnosti}}$$

iz $m_i \leq n_i$ sledi $m_i \geq n_i$ $\forall i$

$\Longrightarrow$ se da diagonalizirati.

KORENSKI PODPROSTORI:

Let $A \in M_n(\mathbb{C})$ in let $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_k)^{r_k}$

njen minimalni polinom

$\forall i = 1, \dots, k$ označimo

$W_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}$ in to je korenski podprostor

matrike A za lastno vrednost λ_i.

Rabimo jih v konstrukciji Jordanske kanonične forme.

Osnovne lastnosti korenskih podprostorov (brez dokaza):

(1.) očitno je $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) \subseteq \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2 \subseteq \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^3 \subseteq \dots$

$$x \in \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^m \Rightarrow (A-\lambda I)^m x = 0 \Rightarrow (A-\lambda I)(A-\lambda I)^m x = 0$$

$$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^{m+1}$$

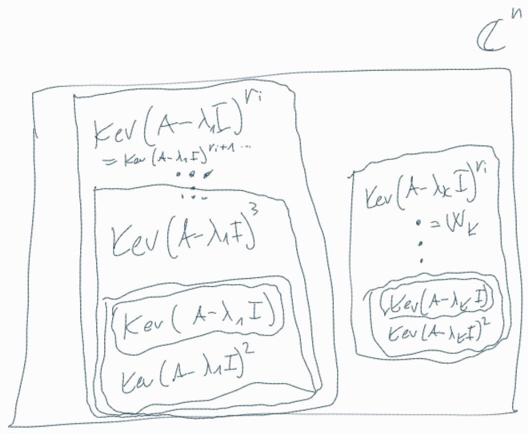
katere inkluzije so enačaji in katere ne?

↳ do r_i te potence so vse inkluzije stroge,

od r_i naprej pa so vse inkluzije enačaji.

$V_i = \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^1$ $\quad \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2 \subset \dots \subset \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^{r_i} = \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^{r_i+1} = \dots$

večkratnost λ_i v minimalnem polinomu



Izkaže se, da je

$\dim W_i = n_i$

↳ algebraična večkratnost λ_i

(2.) pomni: $\dim V_i = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)^1 = m_1$

↳ geometrijska večkratnost λ_i

(3.) $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ (*)

vsota vseh korenskih podprostorov je vse in ta vsota je direktna.

↳ „korenski razcep matrike A"

Pomni: $V_1 + \dots + V_k$ je tudi direktna,

ampak ni nujno enaka $\mathbb{C}^n$.

velja $\mathbb{C}^n = V_1 + \dots + V_k \iff$

A se da diagonalizirati

DOKAZ (3.):

Če vemo, da je vsota direktna, je preprosto dokazati, da je enaka $\mathbb{C}^n$. dokaz z indukcijo:

$$p_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k}$$

vstavi A:

Cayley Hamilton

$$\underset{0}{\overset{\parallel}{p_A(A)}} = (-1)^n \underbrace{(A-\lambda_1 I)^{n_1}}_{A_1} \cdots \underbrace{(A-\lambda_k I)^{n_k}}_{A_k}$$

upoštevamo, da je $n(A_1 \cdots A_k) \le nA_1 + \dots + nA_k$

$n(0)$ $\qquad \dim W_1 \qquad \dim W_k$

$\operatorname{Ker} 0 = \mathbb{C}^n \leftarrow n$

iz direktnosti vsote

$$n(0) \overset{}{=} \dim(W_1 + \cdots + W_k) = n$$

torej $W_1 + \cdots + W_k = \mathbb{C}^n$

Če vemo, da je $W_i \cap W_j = \{0\}$ za $i \neq j$, lahko od tod izpeljemo, da je vsota (*) direktna.

dokaz z indukcijo:

W_1 direktna $\Rightarrow W_1 + W_2$ direktna $\Rightarrow W_1 + \cdots + W_k$ direktna

Korak: $W_1 + \cdots + W_i$ direktna $\overset{?}{\Rightarrow} W_1 + \cdots + W_i + W_{i+1}$ direktna

Baza: W_1 je očitno dir. $\quad w_1 + \cdots + w_i + w_{i+1} \overset{?}{=} 0$

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_i + w_{i+1} \overset{?}{=} 0 \quad / \cdot (A - \lambda_{i+1} I)^{n_{i+1}}$$

$$(A - \lambda_{i+1} I)^{n_{i+1}} w_1 + \cdots + (A - \lambda_{i+1} I)^{n_{i+1}} w_i + \underbrace{(A - \lambda_{i+1} I)^{n_{i+1}} w_{i+1}}_{\text{iz jedra}} = 0$$

$w_1 \in \ker(A - \lambda_1 I)^{n_1}$

$(A - \lambda_1 I)^{n_1} w_1 = 0$

$(A - \lambda_{i+1} I)^{n_{i+1}} (A - \lambda_1 I)^{n_1} w_1 = 0$

$$(A - \lambda_1 I)^{n_1} \underbrace{(A - \lambda_{i+1} I)^{n_{i+1}} w_1}_{0} = 0$$

$\Downarrow \quad \in W_1$

Po I.P. je $W_1 + \cdots + W_i$ direktna, torej

$(A - \lambda_{i+1} I)^{n_{i+1}} w_1 = 0 \Rightarrow w_1 \in W_1$, $w_1 \in W_{i+1}$

$(A - \lambda_{i+1} I)^{n_{i+1}} w_2 = 0$

$\vdots$

$\ldots \quad w_i = 0 \Rightarrow w_i \in W_i$, $w_i \in W_{i+1}$

ker je $W_i \cap W_{i+1} = 0$ (dir. vs.)

$\Rightarrow w_i = 0$

torej v začetni formuli ostane le še

$w_{i+1} = 0$.