Zadosten pogoj za diagonalizabilnost.

Radi bi dokazali izrek:

„Če ima $n \times n$ matrika n paroma različnih lastnih vrednosti, potem je podobna diagonalni matriki."

to bo posledica naslednje trditve:

„lastni vektorji, ki pripadajo paroma različnim lastnim vrednostim, so LN".

dokaz: let A $n\times n$ matrika, $\lambda_1, \dots \lambda_k$ lastne vrednosti za A in $v_1, \dots v_k$ pripadajoči lastni vektorji

dokazujemo tole trditev:

(T_k): $\lambda_1, \dots \lambda_k$ paroma različni $\Rightarrow v_1, \dots v_k$ LN.

dokaz s popolno indukcijo po k.

T_1 „λ_1 je paroma različna", v_1 je kot neničeln vektor LN.

KORAK: $T_k \Rightarrow T_{k+1}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ paroma različne $\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ LN.

PDD $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \; (*)$ $\quad \alpha_1 = \dots = \alpha_{k+1} = 0$

(*) pomnožimo z A

(I) $\quad \alpha_1 \underbrace{v_1 A}_{\lambda_1 v_1} + \dots + \alpha_k \underbrace{v_{k+1} A}_{\lambda_{k+1} v_{k+1}} = 0$

(*) pomnožimo z λ_{k+1}:

(II) $\alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_{k+1} v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$

odštejemo enačbi (I) in (II):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k + 0 = 0$$

Po I.P. so $v_1 \dots v_k$ LN $\Longrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, ker $\lambda_i = \lambda_j \Rightarrow i = j$ (paroma različne λ)

vstavimo v (*)

$\downarrow$

$\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$, ker je v_{k+1} lastni vektor in zato neničeln, je $\alpha_{k+1} = 0$.

torej so $v_1, \dots v_{k+1}$ res LN.

$\square$

trditev T_k velja za vsak k. prvi izrek je posledica T_k

OPOMBE: Posledično je vsota vseh lastnih podprostorov matrike DIREKTNA.

$$V_1 + V_2 = \{ u + v ; \forall u \in V_1, v \in V_2 \}$$

če $\overset{\in V_1}{v_1} + \dots + \overset{\in V_2}{v_k} = 0 \Rightarrow v_1 = \dots = v_k = 0$

$\Longleftrightarrow$

$$\dim(V_1 + \dots + V_k) = \dim V_1 + \dots + \dim V_k$$

Dokaz: $\lambda_1 \dots \lambda_k$ naj bodo vse paroma različne lastne vrednosti in $V_1, \dots V_k$ pripadajoči lastni podprostori. $V_i = \ker(A - \lambda_i I)$

trdimo, da je vsota $V_1 + \dots + V_k$ direktna.

Vzemimo take $v_i \in V_i$, da je $v_1 + \dots + v_k = 0$

... množimo z A...

$Av_1 + \dots + Av_k = 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

... množimo z λ_k...

$\hookrightarrow \lambda_k v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

... odštejemo:

$$\underbrace{(\lambda_1-\lambda_k)v_1}_{=0} + \dots + \underbrace{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)v_{k-1}}_{=0} + 0 = 0$$

po indukciji.

ker so λ paroma različne, je $v_1 = \dots = v_{k-1} = 0$

... vstavimo ...

$\hookrightarrow v_k = 0$

OPOMBA: vemo, da se da matriko $n \times n$ A diagonalizirati
$\iff$ ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.
$\iff$ vsota vseh lastnih podprostorov je enaka celemu prostoru $\mathbb{C}^n$.

ALGEBRAIČNE IN GEOMETRIJSKE VEČKRATNOSTI

Če ima matrika večkratne lastne vrednosti, potem se jo včasih da diagonalizirati, včasih pa ne. Kriterij?

Definicija algebraične večkratnosti lastne vrednosti:

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{n_k}, \text{ kjer so}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vse paroma različne lastne vrednosti A.

stopnji n_i rečemo algebraična večkratnost lastne vrednosti λ_i.

Definicija geometrijske večkratnosti lastne vrednosti λ_i

To je $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I) = n(A-\lambda_i I) = m_i$

$\hookrightarrow$ „ničnost"

Povzetek: Alg. večkr. λ_i ozn. n_i je večkr. λ v $p_A(\lambda)$ karakteristični polinom
Geo. večkr. λ_i ozn. m_i je dimenzija lastnega podprostora za λ_i.

Dokazali bomo:
- $m_i \leq n_i \ \forall i$
- A se da diagonalizirati $\iff m_i = n_i \ \forall i$

Trditev: $m_i \leq n_i \ \forall i$ dokaz:

Let $v_1, \dots, v_{m_i}$ baza za lastni podprostor $V_i = \operatorname{Ker}(A-\lambda_i I)$

Let $v_{m_i+1}, \dots, v_n$ njena dopolnitev do baze $\mathbb{C}^n$

$A v_1 = \lambda_i v_1$

$\vdots$

$A v_{m_i} = \lambda_i v_{m_i}$

$\vdots$

$A v_{m_i+1} = LK \ v_1, \dots, v_n$

$\vdots$

$A v_n = LK \ v_1, \dots, v_n$

$$\Rightarrow A\underbrace{[v_1, \dots, v_{m_i}, v_{m_i+1}, \dots, v_n]}_{P} = [v_1, \dots, v_{m_i}, v_{m_i+1}, \dots, v_n]\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i\end{matrix} & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_i I_{m_i} & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\det\backslash \quad P^{-1}[A - xI]P = \begin{bmatrix} (\lambda_i - x) I_{m_i} & B \\ 0 & C - x I_{n-m_i} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - xI) = (\lambda_i - x)^{m_i}$$

Sledi $(\lambda_i - x)^{m_i}$ deli $\det(A - xI)$ ...

TRDITEV: matriko$_{n\times n}$ se da diagonalizirati $\Leftrightarrow m_i = n_i \ \forall i$

Dokaz: A se da diagonalizirati $\Leftrightarrow A$ ima n LN vektorjev

$\ker(A-\lambda_1 I) + \dots + \ker(A-\lambda_k I) = \mathbb{C}^n$

$\Updownarrow$

$\dim(V_1 + \dots + V_k) = \dim V_1 + \dots + \dim V_k$

$\Updownarrow$ dim lastn. podp. je dir.

$\dim(V_1 + \dots + V_k) = n$

$\Updownarrow$

$\underbrace{\dim V_1}_{m_1} + \dots + \underbrace{\dim V_k}_{m_k} = n$

$\Updownarrow$

$m_1 + \dots + m_k = n_1 + \dots + n_k$

$\Updownarrow$ $m_i \leq n_i \quad \forall i$

$m_1 = n_1, \ m_2 = n_2, \ \dots, \ n_k = m_k$

MINIMALNI POLINOM MATRIKE

imamo polinom $p(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n \in \mathbb{C}[x]$

radi bi izračunali $p(A)$ matrika.

$$p(A) := c_0 A^n + c_1 A^{n-1} + \dots + c_n \underbrace{I}_{A^0}$$

Če je $p(A) = 0$, pravimo, da polinom p „anhilira" matriko A.

OPOMBE: $p(A) = 0 \Rightarrow p(P^{-1}AP) = 0$

karakteristični polinom anhilira matriko. $(p_A(A) = 0$ – kasneje$)$

Definicija minimalnega polinoma:

polinom $m(x)$ s kompleksnimi koef. je minimalni polinom A, če velja: 1.) $m(A) = 0$

2.) m ima vodilni koeficient 1

3.) med vsemi polinomi, ki zadoščajo 1.) in 2.) ima m najnižjo stopnjo.

Dokaz eksistence minimalnega polinoma:

let A $n\times n$ matrika, tedaj so matrike $I, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ linearno odvisne. (ker je $\dim M_n(\mathbb{C}) = n^2$)

torej $\exists c_0, \dots, c_{n^2} \in \mathbb{C}$, ki niso vsi 0, da velja

$c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \dots + c_{n^2} A^{n^2} = 0$. torej

polinom $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n^2} x^{n^2}$ anhilira A.

Če ta polinom delimo z njegovim vodilnim koef., dobimo polinom ki ustreza 1.) in 2.).

Če med vsemi takimi polinomi izberemo takega z najm. stopnjo, le-ta ustreza še 3.).

Dokaz enoličnosti minimalnega polinoma:

Izrek:

Če je $m(x)$ minimalni polinom za A in če polinom $p(x)$ anhilira A, potem $m(x) \mid p(x)$.

↳ deli

dokaz: delimo p z m:

$\exists k, r \ni: p = km + r$ in $\deg r < \deg m$

vstavimo na obe strani A.

$$p(A) = (km+r)(A) \overset{\text{(trivialno bolje D.N.)}}{=} k(A)m(A) + r(A)$$

$p(A) = 0$, $m(A) = 0$

odtod sledi $r(A) = 0$

ker je $\deg r < \deg m$ in ker ima m med vsemi neničelnimi polinomi, ki anhilirajo A, najnižjo stopnjo, r ne more biti neničeln. ker je $r = 0 \Rightarrow m \mid p$.

iz trditve sledi enoličnost:

Let m_1 in m_2 minimalna polinoma matrike A.

Trditev z $m = m_1$ in $p = m_2$: $m_1 \mid m_2$

z $m = m_2$ in $p = m_1$: $m_2 \mid m_1$ ⇒

torej se m_1 in m_2 razlikuje le za konstanten faktor.

↳ ki je 1, ker imata oba vodilni koef. 1

$m_1 = m_2$

označimo m.p. A kot $m_A(x)$.

[NIČLE MINIMALNEGA POLINOMA]

dokažimo, da imata $m_A(x)$ in $p_A(x)$ iste ničle

~ ničle $m_A(x)$ so λ A.

ker je $p_A(A) = 0$ (dokaz naslednjič), velja po trditvi v dokazu enoličnosti, da $m_A \mid p_A$, torej je vsaka ničla od m_A tudi ničla od p_A. treba je dokazati še, da je vsaka ničla od p_A tudi ničla m_A.

TRDITEV: Če je λ lastna vrednost matrike A, je $m_A(\lambda) = 0$

dokaz: let $v \neq 0$ lastni vektor za λ: $Av = \lambda v$

potem je $A^2 v = AAv = A\lambda v = \lambda Av = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$.

in $A^3 v = AAAv = AA\lambda v = \lambda AAv = \lambda^3 v$

⋮

Recimo, da je $m_A(x) = d_0 x^r + d_1 x^{r-1} + \dots + d_r$. Potem je

$$m_A(\lambda)v = (d_0\lambda^r + d_1\lambda^{r-1} + \dots + d_r)v = d_0 \underbrace{\lambda^r v}_{A^r v} + \dots + d_r v =$$

$$= (\overbrace{d_0 A^r v + d_1 A^{r-1} + \dots + I}^{m_A(A)=0})v = 0_v = 0$$

iz $m_A(\lambda)v = 0$ in $v \neq 0$ sledi $m_A(\lambda) = 0$

POVZETEK: $p_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k}$

$m_A(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_k)^{r_k}$

$$\left.\begin{array}{l} m_A \mid p_A \Rightarrow r_i \leq n_i \quad \forall i \\ m_A(\lambda_i) = 0 \Rightarrow 1 \leq r_i \quad \forall i \end{array}\right\} \forall i: 1 \leq r_i \leq n_i$$

stopnja karakt. pol.

Pozor: $r_i \neq m_i$

dimenzija lastnega podprostora