LASTNE VREDNOSTI

[podobnost matrik] — iste velikosti

kvadratni matriki A in B sta podobni, če $\exists$ taka obrnljiva matrika P $\exists$: $B = PAP^{-1}$.

Podobnost je ekvivalenčna relacija:

- refleksivna $A = I A I^{-1}$
- simetrična $B = PAP^{-1} \Rightarrow A = P^{-1}BP = P^{-1}B(P^{-1})^{-1}$
- tranzitivna $B = PAP^{-1}$ in $C = QBQ^{-1} \Rightarrow C = QPAP^{-1}Q^{-1} = (QP)A(QP)^{-1}$

Velja podobnost $\Rightarrow$ ekvivalentnost,
obrat ne velja vedno.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sta ekvivalentni (enaka velikost in rang),
nista pa podobni. (dokaz kasneje)

- Vsaka matrika je ekvivalentna matriki $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- Ali je vsaka kvadratna matrika podobna kaki lepi matriki?
  - $\hookrightarrow$ ja, gornjetrikotni matriki
    - $\hookrightarrow$ celo Jordanski kanonični formi
- A je kvadratna matrika podobna diagonalni? ne.

$\hookrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow$ kdaj je matrika A podobna neki diagonalni matriki?

kdaj $\exists$ diagonalna D in obrnljiva P $\exists$: $A = PDP^{-1}$

Postopamo z nastavkom: $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$,

kjer v_i in λ ne poznamo. P obrnljiva $\Rightarrow$ v_i so LN.

$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD$ in P obrnljiva

$A[v_1 \dots v_n] = [v_1 \dots v_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\Downarrow$

$[Av_1 \dots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n]$ in v_i LN

$\Leftrightarrow$

$Av_1 = \lambda_1 v_1, \dots, Av_n = \lambda_n v_n$ in $v_1, \dots v_n$ LN $\Rightarrow v_i \neq 0$

$\Downarrow$

dana kvadr. matrika

$Av = \lambda \vec{v}$, kjer λ, v neznanki

neznan vektor, različen od $\vec{0}$.

neznan skalar

ta naloga se imenuje „Lastni problem".

spotoma ponovimo izrek o karakterizaciji obrnljivih matrik

$\hookrightarrow$ A obrn $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ stolpci LN $\Leftrightarrow$ vrstice LN $\Leftrightarrow$ ne vsebuje $\vec{0}$ stol./vrs. $\Leftrightarrow \dots$

terminologija: λ je lastna vrednost matrike A, če obstaja
tak $\vec{v} \neq 0$, da $Av = \lambda v$.
v je lastni vektor A, če $\vec{v} \neq 0$ in $\exists$ tak λ,
da $Av = \lambda v$.

$\Rightarrow$ v je lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ

paru (λ, v) rečemo lastni par matrike A.

Q: a je lastni par enolično za A? λ ja, v ne

Enačbo rešujemo v dveh korakih:

1) izračunamo vse λ 2) $\forall \lambda$ poiščemo pripadajoče $\vec{v}$

Premislek: λ je lastna vrednost A. Po definiciji $\exists v \neq \vec{0}$: $Av = \lambda v$

potem $Av = \lambda v = \lambda I v \iff Av - \lambda I v = 0 \iff (A - \lambda I)v = 0$

$(A-\lambda I)v = 0$ za nek $v \neq 0 \iff \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$

$\Updownarrow$ izrek o obrnljivih matrikah

$\boxed{A - \lambda I \text{ ni obrnljiva} \iff \det(A-\lambda I) = 0}$ „Dokaz: je priljubljeno izpitno vprašanje"

Def: Polinom $p_A(x) = \det(A - xI)$ je karakteristični polinom matrike A. Premislek zgoraj nam pove, da so lastne vrednosti A ničle $p_A(x)$.

Polinom lahko nima realne ničle:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A - xI = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - xI) = x^2 + 1$$

v kompleksnem ima ta polinom dve ničli: $i, -i$ in torej dve lastni vrednosti: $\lambda_1 = i$ $\lambda_2 = -i$

v realnem ta polinom nima ničle, zato A nima realne lastne vrednosti.

V nadaljevanju se omejimo na kompleksne matrike in kompleksne lastne vrednosti, saj ima po Osnovnem izreku Algebre polinom s kompleksnimi koef. vedno vsaj kompleksne ničle.

Kako pa iščemo lastne vektorje za lastno vrednost λ?

$$Av = \lambda v \iff v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$$

rešiti moraš homogen sistem linearnih enačb.
Po definiciji je lasten vektor neničelen, zato te trivialna rešitev sistema ne zanima.

Definicija: Množici $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ pravimo LASTNI PODPROSTOR matrike A, ki pripada λ.

vsebuje $\vec{0}$ in množico vektorjev, ki so vsi lastni

Izračunaj lastne vektorje od $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

izračunati moramo $\operatorname{Ker}(A - iI)$ in $\operatorname{Ker}(A + iI)$

$$A - iI = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \qquad A + iI = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

$$(A - iI)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-ix + y = 0$
$-x - iy = 0$

$y = ix$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ix \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Ker}(A - iI) = \operatorname{Lin}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

$$(A + iI)v = 0 \iff \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$xi + 1 = 0$
$-y + iy = 0$
$y = -ix$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -ix \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Ker}(A - iI) = \operatorname{Lin}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -i$ dobra novica: $P = [v_1\ v_2]$ je

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ obrnljiva.

velja: $A = PDP^{-1}$ za $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1}$

Temu se reče diagonalizacija matrike A.

Primer: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det(A - xI) = \det \begin{bmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{bmatrix} = x^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0$

$\operatorname{Ker}(A - 0I) = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Lin}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

slaba novica: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ni obrnljiva. CRK!

torej A ni podobna diagonalni matriki.

to vsi primer a sta $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ podobni?

ne, ker $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ je diagonalna, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pa ni podobna diagonalni.

A lahko lastne vrednosti in lastne vektorje definiramo tudi za linearne preslikave?

lahko, ker so matrike isto kot linearne preslikave.

— Let V vektorski prostor, in $L: V \to V$ linearna preslikava.
nad $F = \mathbb{C}$.

število $\lambda \in F$ je lastna vrednost L, če obstaja tak neničeln $v \in V$, da velja $Lv = \lambda v$.

$\Updownarrow$ $\quad id_V : V \to V$, $v \mapsto v$

$(L - \lambda id_V)v = 0 \Leftrightarrow v \in \operatorname{Ker}(L - \lambda id_V)$

$v \neq 0$

$\det(L - \lambda id_V) = 0$

linearna preslikava? uporaba det?

Ideja: LP priredimo matriko in vzamemo njeno det

Problem: dvem različnim bazam pripadata različni matriki linearne preslikave. Zakaj bi bili njuni det isti?

$L: \underset{B\ \text{baza}}{V} \longrightarrow \underset{B\ \text{baza}}{V}$ vzamemo isto bazo v začetnem in končnem prostoru.

priredimo matriko $L_{B \leftarrow B}$

za drugi par baz C, C pa priredimo matriko $L_{C \leftarrow C}$

Kakšna je zveza med $L_{B \leftarrow B}$ in $L_{C \leftarrow C}$?

Ponovimo: $\underset{B}{U} \xrightarrow{L} \underset{C}{V} \xrightarrow{K} \underset{D}{W}$

$[KL]_{D \leftarrow B} = [K]_{D \leftarrow C} [L]_{C \leftarrow B}$

$$\begin{tikzcd} V_B \arrow[r, "L"] \arrow[d, bend right, "id"'] & V_B \arrow[d, bend left, "id"] \\ V_C \arrow[r, "L"] & V_C \end{tikzcd}$$

$L = id \circ L \circ id$

$L_{C \leftarrow C} = [id\ L\ id]_{C \leftarrow C} = \underbrace{[id]_{C \leftarrow B}}_{P} [L]_{B \leftarrow B} \underbrace{[id]_{B \leftarrow C}}_{P^{-1}}$

Povzetek: matriki $L_{C \leftarrow C}$ in $L_{B \leftarrow B}$ sta podobni.
Podobni matrizi imata isto det.

$\det [L]_{C \leftarrow C} = \det P [L]_{B \leftarrow B} P^{-1} = \cancel{\det P} \det [L]_{B \leftarrow B} \cancel{\det P^{-1}} =$

$= \det [L]_{B \leftarrow B}$

Linearni trans. priredimo matriko tako, da v začetnem in končnem prostoru izberemo isto bazo.

Alternat. razlaga:

A podobna $B \Rightarrow B = PAP^{-1} \Rightarrow B - xI = P(A - xI)P^{-1}$

$\Rightarrow \det(B - xI) = \det(A - xI)$

$\Rightarrow p_A(x) = p_B(x)$

$\Rightarrow$ lastne vrednosti so enake
ne pa nujno lastni vektorji

Naj v lastni vektor $A \Rightarrow Av = \lambda v$

$\Rightarrow PAv = \lambda Pv$

$\Rightarrow \underbrace{(PAP^{-1})}_{B} Pv = \lambda Pv$

$\Rightarrow Pv$ je lastni vektor $B = PAP^{-1}$

[SCHUROV IZREK] vsaka kompleksna kvadratna matrika je podobna zgornje trikotni matriki

A kvadratna kompleksna ima vsaj eno lastno vrednost
Naj v pripadajoči lastni vektor.

$Av = \lambda v$ smo rešili za en λ in en $v \neq 0$.

- dopolnimo v do baze $\mathbb{C}^n$ z vektorji $v_2, \dots v_n$.

$P = [v\ v_2\ \dots\ v_n]$

$AP = [Av\ Av_2\ \dots\ Av_n] = \dots = [v\ v_2 \dots v_n] \begin{bmatrix} \lambda & \alpha_{21} & \dots \\ 0 & \alpha_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & \alpha_{nn} & \dots \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \lambda & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$

$\Longrightarrow A = P \begin{bmatrix} \lambda & B \\ 0 & C \end{bmatrix} P^{-1}$ če je C zgornjetrikotna

$\hookrightarrow C = QTQ^{-1}$,

potem je

$A = P \begin{bmatrix} \lambda & B \\ 0 & QTQ^{-1} \end{bmatrix} P^{-1} =$

$= P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & Q^{-1}B \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}^{-1} P^{-1}$

z indukcijo po dimenziji lahko nadaljujemo in dokažemo, da to velja za vse dimenzije.

zgornje trikotna, ker je T zgornjetrikotna