DOPOLNITEV LN množice do baze.

let V vektorski prostor z dimenzijo n. (ima bazo z n elem.)

TRDIMO: — Vsaka LN množica ima $\leq n$ elementov (že dokazali)

danes { — Vsaka LN množica v V z n elementi je baza
— Vsako LN množico v V z $< n$ elementi lahko dopolnimo do baze

Lema 1: Če so $v_1, \dots v_m \in V$ LN in če $v_{m+1} \notin Lin\{v_1, \dots v_m\}$, potem so tudi $v_1, \dots v_{m+1}$ LN.

Dokaz: $\boxed{\text{Def LN: } \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0}$

let $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{m+1} v_{m+1} = 0$ za $\alpha \in F^n$.

$\underline{\alpha_1 = \dots = \alpha_{m+1} = 0}$

case $\alpha_{m+1} \neq 0$: sledi $v_{m+1} = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_{m+1}}\right) v_1 + \dots + \left(\frac{-\alpha_m}{\alpha_{m+1}}\right) v_m$

Torej $v_{m+1} \in Lin\{v_1, \dots v_m\}$ ⨯ s predpostavko.

case $\alpha_{m+1} = 0$: sledi $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$

po predpostavki so $v_1, \dots v_m$ LN, zatorej $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

Lema 1 dokazana.

Dokažimo sedaj trditev „Vsaka LN množica v V z n elementi je baza".

let $\dim V = n$.

<u>Vsaka LN množica v V z n elementi je baza</u>

RAA pdd $v_1, \dots v_n$ taka LN, ki ni baza.

torej je $v_1, \dots v_n$ ni ogrodje. Torej $Lin\{v_1, \dots v_n\} \neq V$

Zatorej $\exists v_{n+1} \in V$, da je $v_1, \dots v_{n+1}$ LN.

⨯ s trditvijo, da ima vsaka LN množica v V $\leq n$ elementov.

Torej trditev velja.

Dokažimo sedaj trditev „Vsako LN množico v V z $< n$ elementi lahko dopolnimo do baze" $(n = \dim V)$

let $v_1, \dots v_m$ LN množica v V. Vemo, da je $m \leq n$.

Če je $m = n$, je to že baza.

preveriti je treba case $m < n$.

$m < n \Rightarrow v_1, \dots v_m$ ni ogrodje (sicer bi imeli večjo LN množico z več elementi kot neko ogrodje)

{$\forall$ogrodje ima $\geq$ elementov} $\Leftarrow$
{od $\forall$LN množice}

ker $v_1, \dots v_m$ ni ogrodje $\Rightarrow \exists v_{m+1} \in Lin\{v_1, \dots v_m\}$

Po lemi 1 je torej $v_1, \dots v_{m+1}$ LN množica.

Če je $m+1 = n$, je to že baza.

Preveriti je treba case $m+1 < n$, potem $v_1, \dots v_{m+1}$ ni ogrodje $\Rightarrow \exists v_{m+2} \in Lin\{v_1, \dots v_{m+1}\}$.

Po lemi 1 je torej $v_1, \dots v_{m+2}$ LN množica.

Če je $m+2 = n$, je to že baza.

Preveriti je treba case $m+2 < n$, potem $v_1, \dots v_{m+2}$ ni ogrodje $\Rightarrow \exists v_{m+3} \in L\{v_1, \dots v_{m+2}\}$. Po lemi 1 je torej $v_1, \dots v_{m+3}$ LN množica. Če je $m+3 = n$, je to že baza. Preveriti je treba case $m+3 < n$, potem ... in tako dalje, vse dokler ne dosežemo $m+k = n$. tedaj je to baza. Naredili smo $k = n-m$ korakov.

stica: $\underbrace{\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{LN}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\text{dopolnitev}}}_{\text{baza}}$. $\square$

UPORABNA VREDNOST (teh) IZREKA:

— Dimenzije podprostorov V:

Dokažimo dve trditvi:

- V je KRVP in W njegov podprostor, je $\dim W \leq \dim V$

zakaj je W KRVP? Če bi ne bil (RAA):

let $n = \dim V$.

ker ni KRVP, lahko v njem konstruiramo LN množico z $> n$ elementi: $v_1 = 0$ $v_2 \notin \text{Lin}\{v_1\}$ $v_3 \notin \text{Lin}\{v_1, v_2\}$ $v_4 = \text{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$, ..., $v_{n+1} = \{v_1 \dots v_n\}$

po Lemi 1 so $v_1, \dots v_{n+1}$ LN v W, torej tudi LN v V, kar bi pomenilo, da imamo v V LN množico z več kot n elementi. ↯

zakaj je $\dim W = \dim V$?

ker je W KRVP, ima bazo. Ta baza ni nujno baza za V je pa LN v V. Vemo, da vsaka LN množica v V ima $\leq$ elementov kot $\dim V$. Torej je res $\dim W = \dim V$.

- Trditev 2: let V KVP in W_1, W_2 podprostora v V.

Velja $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

DIMENZIJSKA FORMULA ZA PODPROSTORE

def $W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 ; w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$

Načrt dokaza: Izberimo bazo $w_1, \dots w_m$ za $W_1 \cap W_2$.

let $u_1, \dots u_k$ dopolnitev $\vec{w}$ do baze U_1

let $v_1, \dots v_l$ dopolnitev $\vec{w}$ do baze U_2.

trdimo, da je $w_1, \dots w_m, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots v_l$ baza za $W_1 + W_2$; tedaj:

dokaz po zadnem.

$$\dim(W_1 + W_2) = m + k + l$$
$$\dim(W_1 \cap W_2) = m$$
$$\dim(W_1) = m + k \qquad \dim(W_2) = m + l$$

$$\Rightarrow \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

(*)

dokaz, da je $w_1, \dots w_m, u_1, \dots u_k, v_1, \dots v_l$ baza za $W_1 + W_2$

zakaj so ogrodje? Vzemimo poljuben $v \in W_1 + W_2$.

Po definiciji $W_1 + W_2$ $\exists z_1 \in W_1$ in $z_2 \in W_2$, da je $v = z_1 + z_2$. Razvijemo z_1 po bazi $w_1, \dots w_m, u_1, \dots, u_k$ za U_1

Razvijemo z_2 po bazi $w_1, \dots w_m, v_1, \dots v_k$ za U_2

$z_1 = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$

$z_2 = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_k w_k + \xi_1 v_1 + \dots + \xi_l v_l$

torej $v = z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \gamma_1) w_1 + \dots \in \text{Lin}\{w_1, \dots w_m, u_1, \dots u_k, v_1, \dots v_l\}$

so ogrodje. ZAKAJ pa so LN?

Let $\alpha_1 w_1+\dots+\alpha_m w_m+\beta_1 u_1+\dots+\beta_k u_k+\gamma_1 v_1+\dots+\gamma_\ell v_\ell=0$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 w_1+\dots+\alpha_m w_m+\beta_1 u_1+\dots+\beta_k u_k}_{\in W_1 \Downarrow \in W_1\cap W_2} = \underbrace{(-\gamma_1)v_1+\dots+(-\gamma_\ell)v_\ell}_{\in W_2}$$

vstavimo gor in dobimo: $\alpha_1 w_1+\dots+\alpha_m w_m+\beta_1 u_1+\dots+\beta_k u_k=0$.
VPOŠTEVAMO, DA SO $w_1,\dots,w_m,u_1,\dots,u_k$ baza za W_1, tako LN, zato $\vec\alpha=\vec 0$ in $\vec\beta=\vec 0$ in $\vec\gamma=0$, zato je to baza za W_1+W_2 (*)

$\in W_1\cap W_2$

$(-\gamma_1)v_1+\dots+(-\gamma_\ell)v_\ell \in W_1\cap W_2$

ima bazo, lahko ga razvijemo po bazi $w_1,\dots,w_m$ za $W_1\cap W_2$.

$-\gamma_1 v_1+\dots+-\gamma_\ell v_\ell=\xi_1 w_1+\dots+\xi_m w_m$

$$\Rightarrow \underbrace{\gamma_1 v_1+\dots+\gamma_\ell v_\ell+\xi_1 w_1+\dots+\xi_m w_m}_{\text{baza za } W_2\text{, torej LN množica,}}=0$$

sledi: $\gamma_1=\dots\gamma_\ell=\xi_1=\dots=\xi_m=0$

POSLEDICA: $\dim(W_1+W_2)\le\dim W_1+\dim W_2$

enačaj velja $\Leftrightarrow W_1\cap W_2=\{0\}$

baza $\{0\}$ je $\{\}$. $\mathrm{Lin}\{\}=\{0\}$

$\dim\{0\}=|\{\}|=0$

Def: pravimo, da je vsota W_1+W_2 „direktna", če velja $W_1\cap W_2=\{0\}$ oz. ekvivalentno če je $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$)

— [PREHOD NA NOVO BAZO]

Let V vektorski prostor dimenzije n. Recimo, da imamo dve bazi v V.

$B=\{u_1,\dots,u_n\}$ „stara baza"

$C=\{v_1,\dots,v_n\}$ „nova baza"

Vsak vektor $v\in V$ lahko razvijemo po B in po C.

Razvoj po B: $\beta_1 u_1+\dots+\beta_n u_n=v$

Razvoj po C: $\gamma_1 v_1+\dots+\gamma_n v_n=v$

težava je zveza med $\vec\beta$ in $\vec\gamma$ v obeh razvojih

Uvedimo oznako $[v]_B$: koeficienti vektorja v pri razvoju po $B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$

Vsak vektor stare baze razvijemo po novi bazi.

$u_1=\alpha_{11}v_1+\dots+\alpha_{1n}v_n \Leftrightarrow [u_1]_C=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\ \vdots\\ \alpha_{1n}\end{bmatrix}$

$\vdots$

$u_n=\alpha_{n1}v_1+\dots+\alpha_{nn}v_n$

Koeficiente α zložimo v matriko $P_{C\leftarrow B}$.

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\cdots&\alpha_{n1}\\ \vdots& &\vdots\\ \alpha_{1n}&\cdots&\alpha_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[u_1]_C&\cdots&[u_n]_C\end{bmatrix}$$

PREHODNA MATRIKA $B\to C$

sledi: $v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n = \beta_1(\alpha_{11} v_1 + \dots + \alpha_{1n} v_n) + \dots$

$\dots + \beta_n(\alpha_{n1} v_1 + \dots + \alpha_{nn} v_n)$

$$= \underbrace{(\beta_1\alpha_{11} + \dots + \beta_n\alpha_{n1})} v_1 + \dots + \underbrace{(\beta_1\alpha_{1n} + \dots + \beta_n\alpha_{nn})} v_n$$

Po drugi strani je: $v = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n$

(ker je razvoj po bazi enoličen)

sledi $0 = v - v = (\beta_1\alpha_{11} + \dots + \beta_n\alpha_{n1} - \gamma_1) v_1 + \dots$

$\dots + (\beta_1\alpha_{1n} + \dots + \beta_n\alpha_{nn} - \gamma_n) v_n$

$$\beta_1\alpha_{11} + \dots + \beta_n\alpha_{n1} = \gamma_1$$
$$\vdots$$
$$\beta_1\alpha_{1n} + \dots + \beta_n\alpha_{nn} = \gamma_n$$

V matrični obliki se tole zapiše:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{1n} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}}_{P_{C\leftarrow B}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}}_{[v]_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}}_{[v]_C}$$

Dokazali smo: $[v]_C = P_{C\leftarrow B}[v]_B$.

Opombe:
- $P_{B\leftarrow B} = I$
- baze in produkti

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "P_{C\leftarrow B}"] \arrow[rr, bend right, "P_{D\leftarrow B}"'] & C \arrow[r, "P_{C\leftarrow D}"] & D \end{tikzcd}$$

$P_{D\leftarrow B} = P_{C\leftarrow B} \cdot P_{C\leftarrow D}$

- če v 2 zamenjaš D z B dobiš

$$I = P_{B\leftarrow C} \cdot P_{C\leftarrow B}$$

sledi $P_{B\leftarrow C} = (P_{C\leftarrow B})^{-1}$

- let $v \in F^n$ in S standardna baza za F^n.

Potem $[v]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = v$

sledi $P_{S\leftarrow B} = \begin{bmatrix} [u_1]_S & \cdots & [u_n]_S \end{bmatrix} =$ za $B = u_1, \dots, u_n$

$= \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$

sledi $P_{S\leftarrow C} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$

$P_{C\leftarrow B} = \underbrace{P_{C\leftarrow S}}_{P_{S\leftarrow C}} \cdot P_{S\leftarrow B}$ (samo v F^n, drugače ni eksplicitne oblike).

ENDE DES ERSTES SEMESTER