BAZE:

let V vektorski prostor nad poljem F.

množica $\{v_1, \dots, v_n\}$ je baza, če je LN in je ogrodje.

Def „LN":

Množica $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ je linearno neodvisna, če za vsake $\alpha_1, \dots \alpha_n \in F$, ki zadoščajo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ velja $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Ekvivalentne definicije LN:

- $v_1 \cdots v_n$ je LN $\Leftrightarrow$ vsak vektor iz V se da na kvečjemu en način izraziti kot linearna kombinacija $v_1 \dots v_n$.
- $v_1 \cdots v_n \subseteq V$ je LN $\Leftrightarrow$ noben element te množice ni LK preostalih.

Dokaz ekvivalentnosti tega je enak kot tisti za $V = \mathbb{R}^n$.

Povzetek: $v_1 \alpha_1 + \dots + v_n \alpha_n = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = 0$ } osnovna formula za LN.

Def „ogrodje":

- Množica $\{v_1, \dots v_n\}$ je ogrodje $\Leftrightarrow$ vsak $v \in V$ se da na vsaj en način izraziti kot LK te množice $\Leftrightarrow$

$\operatorname{Lin}\{v_1, \dots v_n\} = V$.

Primeri Baz:

I. let $V = F^n$. STANDARDNA BAZA

$v_1 = (1, 0, 0, \dots)$
$v_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$
$\dots$
$v_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

KAKO PREVERIMO, A SE $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq F^n$ baza?

$\det [v_1, v_2, \dots, v_n]$: $= 0$ ni baza; $\neq 0$ baza } Sledi iz izreka o karakterizaciji obrnljivih matrik.

II. BAZE V $F[x]_{<n}$ (polinomi stopnje manjše od n)

- standardna baza: $\{1, x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n\}$
- vzemimo $\overbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{\text{paroma različni}} \in F$ in definirajmo:

$$p_i(x) = \frac{(x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_n)}{x - \alpha_i}$$ } polinom stopnje $n-1$ za vsak i

$\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\}$ so baza.

- LN: $\alpha_1 p_1(x) + \dots + \alpha_n p_n(x) = 0 \overset{???}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$\Downarrow$ vstavi $x = \alpha_1, \dots \alpha_n$

$$\alpha_1 \underbrace{p_1(\alpha_1)}_{\neq 0} + \dots + \alpha_n \underbrace{p_n(\alpha_1)}_{=0} = \dots = \alpha_1 \underbrace{p_1(\alpha_n)}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{p_n(\alpha_n)}_{\neq 0} = 0$$

$\Downarrow \alpha_1 = 0$ $\quad \Downarrow \alpha_i = 0$ $\quad \Downarrow \alpha_n = 0$

opazimo: $p_i(\alpha_j) = \begin{cases} = 0 & ; i \neq j \\ \neq 0 & ; i = j \end{cases}$

Ogrodje: uporabi obrazec za Lagrangev interpolacijski polinom.

... ...

[Obstoj baze] Omejimo se na končnorazsežne vektorske prostore.

Vektorski prostor je končno razsežen, če ima končno ogrodje: $\exists v_1, \dots v_n \ni: V = Lin\{v_1, \dots, v_n\}$

IZREK O OBSTOJU BAZE:

Vsak končno razsežen vektorski prostor ima vsaj eno bazo.

Dokaz: let V KRVP = (končno razsežen vektorski prostor)

in let $\{v_1, \dots v_n\}$ ogrodje za V.

ogrodje ni nujno LN, zato:

let S (minimalna) najmanjša podmnožica $\{v_1, \dots v_n\}$, ki je še ogrodje za V.

trdimo, da je S baza na V.

po konstrukciji je S ogrodje, dokažimo, da je tudi LN:

RAA: pdd S je linearno odvisna. Želimo $\times$.

$\Rightarrow \exists u \in S \ni: u$ je lin. komb. $S \setminus \{u\}$.

Dokažimo $S \setminus \{u\}$ je ogrodje ($\times$ s predpostavko, da je S najmanjše ogrodje)

...

$\Rightarrow$ vsak končno razsežen vektorski prostor ima bazo

$\Rightarrow$ vsako ogrodje ima podmnožico, ki je baza.

TRDITEV: Poljubni dve bazi v KRVP imata enako elementov. (enoličnost moči baze)

To bomo izkoristili: za definicijo dimenzije KRVP:

Def: Dimenzija je moč baze KRVP.

Dokaz je dolg.

Lema 1: Vsak poddoločen homogen sistem linearnih enačb ima netrivialno rešitev.

Dokaz: popolno indukcijo po številu enačb.

Baza: homogena Lin. enačba z $\boxed{\text{vsaj dvema spremenljivkama}}$ da je poddoločen sistem

ima netrivialno rešitev:

na desni je 0 $(\vec{b} = 0)$

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad n \geq 2$$

case $\alpha_n = 0$:

netr. rešitev je:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0$$
$$x_n = 1$$

case $\alpha_n \neq 0$:

netr. rešitev: $\quad (-\alpha_n \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_n = 0)$

$$x_1 = -\alpha_n$$
$$x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$$
$$x_n = \alpha_1$$

(nadaljujemo lemo 1)

INDUKCIJSKI KORAK: Predp: trditev velja za vse sist. z n-1 enačb. (podd. hom.)

vzemimo podd. hom. sist. z n enačbami in m spremenljivk:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1m}x_m &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}\right\}$$ ker je sist. poddoločen, je $m > n$.

case 1: $\alpha_{1m} = \dots = \alpha_{nm} = 0$

netr. rešitev je:

$x_1 = \dots = x_{m-1} = 0$

$x_m = 1$

case 2: $\exists i: \alpha_{im} \neq 0$

→ iz ite enačbe izrazi x_m in vstavi v vse ostale enačbe in uredi, dobiš podd. hom. sist z eno enačbo in eno spremenljivko manj.

Po I.P. ima ta sist. netr. rešitev.

iz novega manjšega sistema dobimo rešitev večjega prvotnega sistema tako, da rešitev manjšega vstavimo v x_m

lema 1 dokazana.

Lema 2: če je $u_1, \dots u_m$ LN množica v V in $v_1, \dots v_n$ ogrodje za V, je $m \leq n$.

(zdb moč katerekoli LN množice je manjša ali enaka od katerega koli ogrodja v V.)

RAA pdd $u_1, \dots u_m$ je LN, $v_1, \dots v_n$ ogrodje in da je $n > m$.

iščemo X.

- vsakega od u lahko razvijemo po v.

$u_1 = \alpha_{11}v_1 + \dots + \alpha_{1n}v_n$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$u_m = \alpha_{m1}v_1 + \dots + \alpha_{mn}v_n$

- pomnožimo ito enačbo z x_i $\forall i \in [1, m]$ in seštejemo te enačbe: $(*)$ → $\vec{x}$ določimo kasneje.

$x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_mu_m =$

$= (\alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{m1}x_m)v_1 + \dots + (\alpha_{1n}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_m)v_n$

izenačimo koeficiente z 0:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{m1}x_m &= 0 \\ \dots \qquad & \quad \dots \\ \alpha_{1n}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_m &= 0 \end{aligned}\right\}$$ poddoločen homogen sistem.

po lemi 1 ima ta sistem netrivialno rešitev, (*) recimo $(\gamma_1, \dots \gamma_m)$. če to rešitev vstavimo v $(*)$, dobimo:

$\gamma_1u_1 + \dots + \gamma_mu_m = 0v_1 + \dots + 0v_m = 0$

Lema 2 cont.:

Ker so $u_1, \dots u_m$ LN, so $\gamma_1, \dots \gamma_m = 0$,

ker je v $\cancel{\times}$ s predpostavko (*),

da je $\vec{\gamma}$ netrivialna rešitev. $\times$

Lema 2 dokazana. torej je predpostavka m>n napačna, torej $m \leq n$.

Posledično:

Izrek o enoličnosti moči baze:

let V KRVP z n elementno bazo.

1. $\Rightarrow \forall$ linearno neodvisna množica A v V ima $\leq n$ elementov

2. $\Rightarrow \forall$ ogrodje v V ima $\geq n$ elementov

3 $\Rightarrow \forall$ baza v V ima n elementov.

Dokaz: let $v_1, \dots v_m$ baza za V.

let $u_1, \dots u_m$ LN množica v V.

1. $\forall$ baza je ogrodje $\Rightarrow$ po Lemi 2 velja, ker je $v_1, \dots v_n$ ogrodje, je $m \leq n$

2. ~~ker~~ je $v_1, \dots v_n$ LN, je $n \leq m$ po Lemi 1.

3. sledi iz 1 in 2, ker je baza tako ogrodje ~~kot~~ LN hkrati.

S tem definiramo dimenzijo KRVP:

dim V = moč(baza v V)

Primeri: $\dim F^n = n$

$\dim M_{m \times n}(F) = m \cdot n$