VEKTORSKI PROSTORI

Definicija in primeri:

Ideja: $\sim$ je Abelova grupa z dodatno strukturo (množenje s skalarjem)

Def: let F polje (komutativen obseg)
↳ komut. kolobar z inverzi $\forall$ elementa in enota.

operaciji
$V+V \to V$
$\boxed{F} \cdot V \to V$
↳ s F ozn. skalar

Vektorski prostor nad F je taka $(V, +, \cdot)$, da velja

1.) $(V,+)$ je Abelova grupa
- komutativnost $a+b=b+a \ \forall a,b \in V$
- asociativnost ...
- enota $\exists 0 \in V \ni: a+0=a$
- inverzi $\forall a \ \exists a^{-1} \ni: a+a^{-1}=0$

2.) lastnosti množenja s skalarjem

AKSIOMI:
- $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall \alpha \in F$ in $a,b \in V$
- $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha,\beta \in F$ in $a \in V$
- $(\alpha \cdot \beta)a = \alpha(\beta \cdot a) \quad \forall a \in V$ in $\alpha,\beta \in F$
- $1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$ (1 je enota za $\cdot$)

↳ ABSTRAKTNA FORMULACIJA:

$\forall \alpha \in F$ označimo z φ_α preslikavo $V \to V$, ki pošlje $v \mapsto \alpha v$ $(v \in V)$.
$(\varphi_\alpha : V \to V)$.

Vse formulacije iz 2.) sedaj označimo z abstraktni formulaci:

- $\varphi_\alpha(a+b) \overset{def}{=} \alpha(a+b) \overset{2.)}{=} \alpha a + \alpha b \overset{def}{=} \varphi_\alpha(a) + \varphi_\alpha(b)$
  ↳ Vidimo, da je φ_α hmf iz $(V,+)$ v $(V,+)$.
- $\varphi_{\alpha+\beta}(a) \overset{def}{=} (\alpha+\beta)a \overset{2.)}{=} \alpha a + \beta a \overset{def}{=} \varphi_\alpha(a) + \varphi_\beta(a) = (\varphi_\alpha + \varphi_\beta)(a)$.
  ↳ torej $\varphi_{\alpha+\beta} = \varphi_\alpha + \varphi_\beta$
- $\varphi_{\alpha\beta}(a) \overset{def}{=} (\alpha\beta)a \overset{2.)}{=} \alpha(\beta a) \overset{def}{=} \varphi_\alpha(\varphi_\beta(a)) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta)a$
  ↳ torej $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$.
- $\varphi_1(a) \overset{def}{=} 1 \cdot a \overset{2.)}{=} a$
  ↳ torej $\varphi_1 = id$.

POVZETEK: z $End(V,+)$ označimo množico vseh hmf iz $(V,+)$ v $(V,+)$. ta množica je kolobar za operaciji
- $(\varphi+\psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$
- $(\varphi\psi)(a) = \varphi(a)\psi(a)$

$\forall a$

2.) pove, da je $\left\{ \begin{array}{l} F \to End(V,+) \\ \alpha \mapsto \varphi(\alpha) \end{array} \right\}$ hmf kolobarjev.

Opomba: Če v definiciji vektorskega prostora zamenjamo polje F s kolobarjem F, dobimo definicijo <u>modula</u> nad F.

Primeri vektorskih prostorov.

I.) „standarden primer": let F polje
let $n \in \mathbb{N}$

Definiramo $V = F^n$ (množica vseh n-teric s komponentami v F)
$\hookrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$.

def oper. $+$: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$
def oper. $\cdot$: $\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1 \gamma, \alpha_2 \gamma, \dots, \alpha_n \gamma)$.

s temi pogoji je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor $\sim$ ustreza vsem osmim aksiomom.

II.) let F polje ; $n, m \in \mathbb{N}$.
def $V := M_{m,n}(F) = m \times n$ matrike nad F
$+, \cdot$ definirani po komponentah.

III.) let F polje, $S \neq \emptyset$, S množica.
def $V := F^S$ (vse f-je $S \to F$)
naj bosta $\varphi, \psi : S \to F$
def $(\varphi + \psi)(s) = \varphi(s) + \psi(s)$. $\forall s \in S$
$\gamma \cdot \varphi(s) = (\gamma \cdot \varphi)(s)$ $\forall s \in S$

$\to$ podobna definicija kot z n-terico (I.), saj lahko n-terico identificiramo s funkcijo iz $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ v F.

$\hookrightarrow$ III. nam dovoli neskončnorazsežne vektorske prostore, saj S ni nujno končna, n-terica pa vedno implicitno je (n being $\in \mathbb{N}$).

IV. POLINOMI let $V := F[x]$ (polinomi v spremenljivki x s koeficienti v F).

Seštevanje definiramo po komponentah

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2) + (\pi + \psi x) = (\alpha + \pi + (\psi + \beta) x + \gamma x^2)$$

množenje s skalarjem

$$\gamma(\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x^n) = (\gamma \alpha_0 + \gamma \alpha_1 x^1 + \dots + \gamma \alpha_n x^n)$$

V. let V_1, V_2 dva vektorska prostora nad F.
tvorimo nov vektorski prostor nad F, ki mu pravimo „direktna vsota" V_1 in V_2 in ga označimo z
$V_1 \oplus V_2$.

$$V_1 \oplus V_2 = \{(v_1, v_2);\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$$

seštevanje: $(v_1, v_2) + (v_1' + v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2')$

množenje s skalarjem: $\alpha(v_1, v_2) = (\alpha v_1, v_2) \qquad \alpha \in F$

Definicijo posplošimo na direktno vsoto n vektorskih prostorov — elementi V so tedaj urejene n-ice.

PODPROSTORI vektorskih prostorov — VEKTORSKI PODPROSTORI

tu je $(V, +)$ podgrupa. (taka podmnožica V_1 zaprta za odštevanje (*) (in neprazna))

~~~~~~~~ ODMOR ~~~~~~~~

Def: Let $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad F.
Vektorski podprostor je taka neprazna podmnožica v V, ki je zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem.

natančneje:

$(W, +, \cdot)$ je vektorski podprostor $(V, +, \cdot)$ $\Longleftrightarrow$

(i) $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$

(ii) $\forall a, b \in W: a + b \in W$

(iii) $\forall a \in W, \alpha \in F: \alpha a \in W$.

Lastnosti (ii) in (iii) se da združiti v eno:

$$\forall a_1, a_2 \in W, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in F: \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in W$$

zdb vektorski podprostor je taka podmnožica, da vsebuje vse linearne kombinacije vseh svojih elementov.

odštevanje $(a-b)$ je poseben primer linearne kombinacije,
$a_1 - a_2 = 1 \cdot a_1 + (-1) a_2$,
tako potrdi (*).

Primeri:

I. Let $V = \mathbb{R}^2$ (ravnina).

Poišči vse vektorske podprostore v V.

- premice, ki gredo skozi izhodišče.

izhodišče: ... 2 trivialna podprostora
~~~~~~~~

· izhodišče $\Big\}$ trivialna podprost.
· cela ravnina.

N v $(V,+,\cdot)$ sta 0 in V. $\forall (V,+,\cdot)$ vektorski prostor.

TRDITEV: $\forall$ podprostor vsebuje 0.

I. Dokaz: po definiciji je vsak vektorski podprostor prazen, torej
obstaja $w \in W$. po (iii) ((iii) $\forall a \in W, \alpha \in F: \alpha a \in W$.)
sledi $0 \cdot w \in W$.

$$\underline{0 \cdot w \stackrel{?}{=} 0}$$
$$(0+0)w \stackrel{?}{=} 0$$
$$0w + 0w \stackrel{?}{=} 0 = 0 \cdot w \quad / -0 \cdot w$$
$$0w = 0 \checkmark$$

desna stran je 0

III. TRDITEV: Množica rešitev $\boxed{\text{homogene}}$ linearne enačbe je vedno vektorski podprostor.

Dokaz: imamo:

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \quad (*)$$

če sta $\vec{a} = (a_1, \ldots a_n)$ in $\vec{b} = (b_1, \ldots b_n)$,

je $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$
in $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = 0$

Vzemimo poljuben $\alpha, \beta \in F$:

$$\alpha(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) + \beta(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n) = 0$$
$$\alpha_1(\alpha a_1 + \beta b_1) + \ldots + \alpha_n(\alpha a_n + \beta b_n) = 0$$

tedaj je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = (\alpha a_1 + \beta b_1, \ldots, \alpha a_n + \beta b_n)$
tudi rešitev te $(*)$
ker je množica rešitev $(*)$ zaprta za linearne kombinacije svojih elementov, je vektorski podprostor v F^n.

Opomba: podoben račun velja tudi za množico rešitev sistema linearnih enačb, sledi pa to tudi iz naslednjega primera:

IV. Presek dveh podprostorov je tudi sam spet podprostor.
Naj W_1, W_2 podprostora v V.

dokažimo, da je $W_1 \cap W_2$ podprostor.

Vzemimo poljubna $a, b \in W_1 \cap W_2$ in $\alpha, \beta \in F$.

dokažimo, da je $\alpha a + \beta b \in W_1 \cap W_2$.

vemo $a, b \in W_1$ in $a, b \in W_2$

ker je podprostor, je zaprt za linearne kombinacije svojih elementov: $\alpha a + \beta b \in W_1$

— || — $\alpha a + \beta b \in W_2$

tedaj je presek podprostorov $\alpha a + \beta b \in W_1 \cap W_2$ zaprt za LK svojih elementov in s tem tudi sam podprostor.

opomba: to očitno lahko posplošimo na več podprostorov. presek nikoli ni prazen, saj ima podprostor vedno vsaj 0.

[VSOTA PODPROSTOROV]

let W_1, W_2 podprostora v V.

Def: $W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 ;\ w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2 \}$

trdimo, da je vsota podprostorov tudi sama podprostor.

let $a, b \in W_1 + W_2$. $\xrightarrow{def.}$ $b = b_1 + b_2$; $b_1 \in W_1$, $b_2 \in W_2$

$\xrightarrow{def.}$ $a = a_1 + a_2$; $a_1 \in W_1$, $a_2 \in W_2$

$$\forall \alpha, \beta \in F \Longrightarrow \alpha a + \beta b = \alpha(a_1 + a_2) + \beta(b_1 + b_2) = \underbrace{\underbrace{\alpha a_1 + \beta b_1}_{\in W_1} + \underbrace{\alpha a_2 + \beta b_2}_{\in W_2}}_{\in W_1 + W_2}$$

$\square$, je zaprt.

opomba: očitno lahko definicijo vsote razširimo na več podprostorov.

$W_1 + \dots + W_n$ je podprostor

primer: $\underbrace{\text{Lin}\{a_1\}}_{\text{podprostor}} + \dots + \underbrace{\text{Lin}\{a_n\}}_{\text{podprostor}} = \underbrace{\text{Lin}\{a_1, \dots, a_n\}}_{\text{podprostor}}$ $\Rightarrow$

ogrinjača, premica